Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Matematika i informatika

Sadržaj sveske sa vježbi iz predmeta Euklidska geometrija 1

(akademska 2011/2012.)

Literatura i korisne zbirke su:

- R. Tošić, V. Petrović, Problemi iz geometrije (-Metodička zbirka zadataka-), Stylos
- M. Prvanović, Osnovi geometrije, Građevinska knjiga
- N. V. Jefimov, Viša geometrija, Naučna knjiga
- H. Meschkowski, Temelji euklidske geometrije, Školska knjiga
- R. Hartshorne, Euclid and beyond, Springer

Sveska je skunuta sa stranice
pf.unz.ba\nabokov

Za uočene greške, kritike i mane pisati na
infoarrt@gmail.com

6. Dokazati da je samo tačka S, $\{S\} = a \cap b$, fiksna tačka transformacije podudarnosti $\Pi = \sigma_a \circ \sigma_b$ $(a \not\equiv b)$.

Rj.
$$\left.\begin{array}{l} a \text{ i } b \text{ prave}, a \not\equiv b \\ \{S\} = a \cap b \\ \Pi = \sigma_a \circ \sigma_b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Pi(S) = S \\ \text{i } \forall (X \neq S)\ \Pi(X) = X' : X \neq X' \end{array}$$

Provjerimo da li je tačka S fiksna tačka transformacije podudarnosti Π

$$\Pi(S) = \sigma_a \circ \sigma_b(S) = \sigma_a(\sigma_b(S)) \overset{S \in b}{=\!=} \sigma_a(S) \overset{S \in a}{=\!=} S$$

tj. $\Pi(S) = S$

Tačka S jest fiksna tačka transformacije.

Dokažimo još njezinu jedinstvenost.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da

$\exists X \neq S : \Pi(X) = X$

$a \cap b = \{S\}$ i $X \neq S \Rightarrow X \notin a \cap b$

Razmotrimo dva slučaja:

1° $X \in b$

Tad $\sigma_b(X) = X$

$$\Pi(X) = \sigma_a(\sigma_b(X)) = \sigma_a(X) \overset{\Pi(X)=X}{=\!=\!=} X \Rightarrow X \in a$$

$X \in a$ i $X \in b \Rightarrow X \in a \cap b$
kontradikcija
(sa $X \neq S$)

2° $X \notin b$

Tad $\sigma_b(X) = X'$ i $X \neq X'$ (b simetrala duži XX')

$$\Pi(X) = \sigma_a(\sigma_b(X)) = \sigma_a(X') \overset{\Pi(X)=X}{=\!=\!=} X \quad (a \text{ simetrala duži } XX')$$

a simetr. XX' i b simetr. $XX' \Rightarrow a \equiv b$
kontradikcija
(sa $a \not\equiv b$)

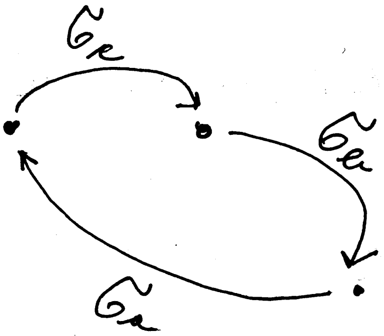
Pretpostavka da tačka S nije jedina fiksna tačka transformacije pod. Π nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna.
Prema tome: S je jedina fiksna tačka transf. Π.

q.e.d.

Napomena: Primjetimo da je $\sigma_a \circ \sigma_b$ rotacija oko tačke S.
Rotacija oko S ima jednu jedinu fiksnu tačku S.

7. Dokazati da kompozicija tri osno simetrije ne može biti identitet.

Rj. $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ su tri osne simetrije $\Big\} \Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \neq id$.



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. da je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = id$.

Znamo da je $\sigma_c \circ \sigma_c = \sigma_c^2 = id$

pa

$$\underline{\sigma_a \circ \sigma_b} \circ \sigma_c = \underline{\sigma_c} \circ \sigma_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$$

Razmotrimo dva slučaja

1° $a \neq b$

Na osnovu prethodnog zadatka transform. $\sigma_a \circ \sigma_b$ ima tačno jednu fiksnu tačku $\{S\} = a \cap b$.

σ_c ima beskonačno mnogo fiksnih tački (sve tačke prave c)

kontradikcija
(sa $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$)

2° $a = b$

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_a \circ \sigma_a = id = \sigma_c \Rightarrow \sigma_c = id$

kontradikcija
(osna simetrija nije identitet)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas dovodi do kontradikcije pa nije tačna. Prema tome

$$\sigma_a \circ \sigma_e \circ \sigma_e \neq id$$

q.e.d.

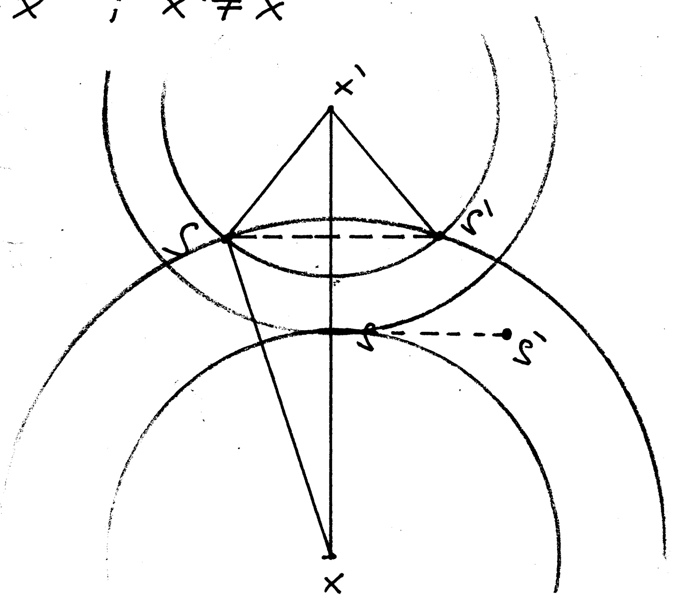
8. Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna - sama sebi inverzna).

Rj. $\left.\begin{array}{l}\Pi \text{ transformacija podudarnosti} \\ \Pi \circ \Pi = id\end{array}\right\} \Rightarrow \Pi = ?$

Odmah možemo primjetiti da je identična transformacija podudarnosti involutivna transformacija.

Neka je $\Pi \neq id$ involutivna transformacija podudarnosti u ravni tj. $\Pi \circ \Pi = id$.
Nađi ćemo tri nekolinearne tačke na kojima je Π involucija.

$\Pi \neq id \Rightarrow \exists x \in \alpha : \Pi(x) = x' \;;\; x' \neq x$



Na duži xx' uzmimo tačka s za koju vrijedi $xs = x's$.

Pretpostavimo da je $\Pi(s) = s'$

Imam

$xs \cong \Pi(x)\Pi(s) = x's'$

$x's \cong \Pi(x')\Pi(s) = xs'$

$\left.\begin{array}{l} xs \cong x's \\ xs \cong x's' \\ x's \cong xs' \end{array}\right\} \Rightarrow x's' \cong x's \Rightarrow s' \in k(x', x's)$

$\left.\begin{array}{l} xs \cong x's \\ xs \cong x's' \\ x's \cong xs' \end{array}\right\} \Rightarrow xs \cong xs' \Rightarrow s' \in k(x, xs)$

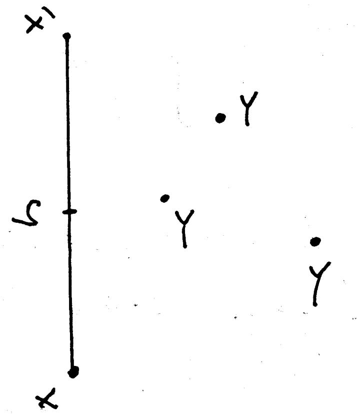
$\Rightarrow$ kako je $xs = x's$ to $k(x', x's) \cap k(x, xs) = \{s\}$

Iz čega slijedi da je $S \equiv S'$ tj. $\Pi(S) = S$.
Našli smo dvije tačke X i S.
Pokažimo još da $\exists Y \in \alpha$ koja nije kolinearna sa X i S za koju vrijedi $\Pi(Y) = Y'$ i $Y \neq Y'$.

Ukoliko bi bilo $Y \in \alpha$ i $Y \notin p(X,S)$ i $\Pi(Y) = Y$

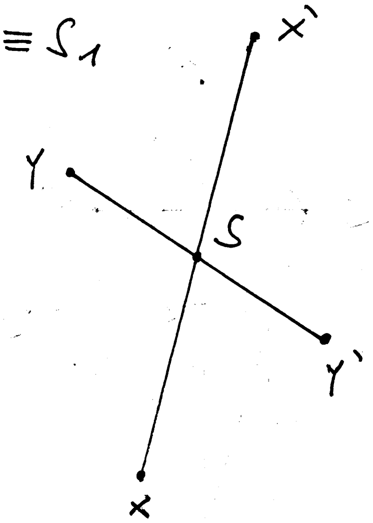
$$\Longrightarrow \quad XY \cong \Pi(X)\Pi(Y) \cong X'Y \quad \text{za } \forall (Y \in \alpha)\ Y \notin p(X,S)$$

\# nemoguće



Znači $\exists Y \in \alpha : \Pi(Y) = Y'$ i $Y' \neq Y$ i $Y \notin p(X,S)$
Neka je S_1 sredina duži YY'. Na osnovu razmatranja za tačku X znamo da je $\Pi(S_1) = S_1$.
Posmatranjem sljedeća dva slučaja odredimo šta je Π.

$1°$ $S \equiv S_1$



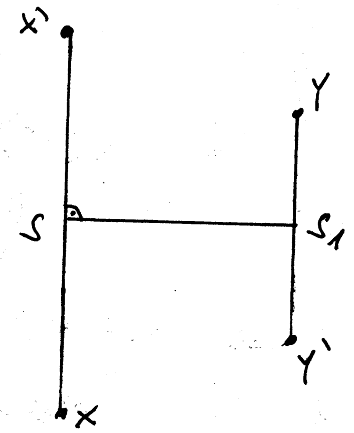
$$\left.\begin{array}{l} \Pi(X) = X' \\ \Pi(Y) = Y' \\ \Pi(S) = S \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_S(X) = X' \\ \sigma_S(Y) = Y' \\ \sigma_S(S) = (S) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi \equiv \sigma_S$$

$2°$ $S \not\equiv S_1$

Pokažimo da je prava $p(S, S_1)$ okomita na XX'.



$$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ SS_1 \cong SS_1 \\ XS_1 \cong \Pi(X)\Pi(S_1) = X'S_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle XS_1S \cong \triangle X'S_1S$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle XSS_1 \cong \measuredangle X'SS_1 = \text{prav ugao}$$

(naporedni uglovi)

$$p(S, S_1) \perp XX'$$

Kako je S središna duži XX' $\Rightarrow$ $p(S,S_1)$ simetrala duži XX'

Uvedimo oznaku $s = p(S, S_1)$

$$\begin{array}{lcl} \Pi(S) = S & & \sigma_s(S) = S \\ \Pi(S_1) = S_1 & ; & \sigma_s(S_1) = S_1 \\ \Pi(X) = X' & & \sigma_s(X) = X' \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi \equiv \sigma_s .$$

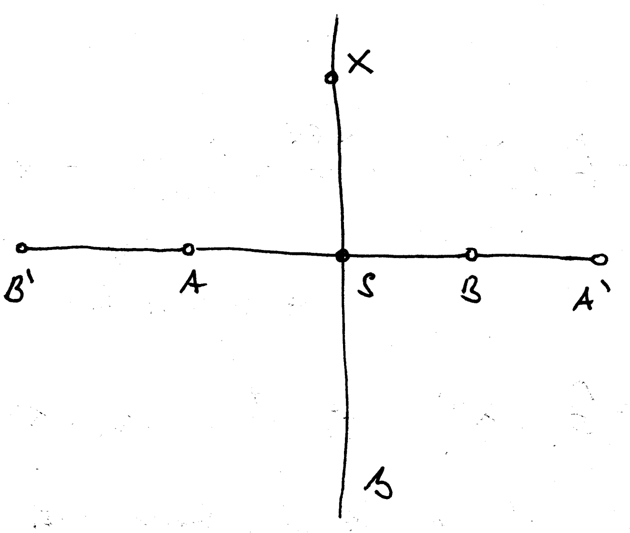
Jedine tri involutivne transformacije podudarnosti u ravni su identitet, osna simetrija i centralna simetrija.

9. Dokazati da je prava s simetrala duži AB ako i samo ako je $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$.

R.

potreban uslov

„$\Rightarrow$": s simetrala duži AB $\Rightarrow$ $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$.



Uzmimo tačku $X \in s$ takvu da $X \notin p(A, B)$. Neka je $s \cap AB = \{S\}$.

Za tri nekolinearne tačke A, B i X ćemo pokazati da vrijedi $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$.

a) za tačku A

$$\sigma_A \circ \sigma_s(A) = \sigma_A(\sigma_s(A)) \xlongequal{s \text{ sim } AB} \sigma_A(B) = B' \Rightarrow A \text{ sredina duži } BB' \text{ i } B\text{-}A\text{-}B'$$

$$\Downarrow$$

$$BA = B'A$$

$$\sigma_s \cdot \sigma_B(A) = \sigma_s(\sigma_B(A)) = \sigma_s(A') \Rightarrow B \text{ sredina duži } AA' \text{ i } A\text{-}B\text{-}A'$$

$$\Downarrow$$

$$AB = BA'$$

$s \cap AB = \{S\}$, S sredina duži AB $\Rightarrow$ $AS = BS$

$$\left.\begin{matrix} BA = B'A \\ AB = BA' \\ AS = BS \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB' + AS = BA' + BS \Rightarrow SB' = SA' \Rightarrow S \text{ sredina duži } A'B'$$

$S \in s$ i $s \perp p(A,B) = p(A',B')$ $\Rightarrow$ s simetrala duži $A'B'$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_s(A') = B'$$

Imamo

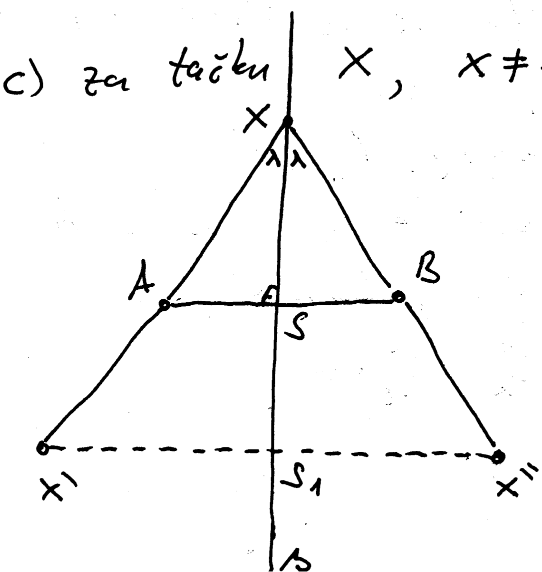
$$\sigma_A \circ \sigma_s(A) = \sigma_s \circ \sigma_B(A) = B'$$

b) za tačku B

$$\left.\begin{matrix} \sigma_A \circ \sigma_s(B) = \sigma_A(\sigma_s(B)) \xlongequal{s \text{ sim } AB} A \\ \sigma_s \circ \sigma_B(B) = \sigma_s(\sigma_B(B)) = \sigma_s(B) \xlongequal{s \text{ sim } AB} A \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_s(B) = \sigma_s \circ \sigma_B(B) = A$$

c) za tačku X, $X \neq S$ i $X \in s$.



$$\sigma_A \circ \sigma_s(X) = \sigma_A(\sigma_s(X)) \xlongequal{X \in s} \sigma_A(X) = X'$$

$$\Downarrow$$

A sredina duži XX'

$$\sigma_s \circ \sigma_B(X) = \sigma_s(X'') \Rightarrow B \text{ sredina } XX''$$

Trebamo pokazati da je s simetrala duži $X'X''$

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong BS \\ \measuredangle ASX \cong \measuredangle BSX = \text{prav ugao} \\ SX \cong SX \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AXS \cong \triangle BXS$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AXS = \measuredangle BXS = \lambda \quad \text{i} \quad AX \cong BX$$

Neka je $s \cap x'x'' = \{S_1\}$.

$$\left.\begin{array}{l} XX' = 2AX = 2BX = XX'' \\ \measuredangle S_1XX' \cong \measuredangle S_1XX'' = \lambda \\ XS_1 \cong XS_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle XS_1X' \cong \triangle XS_1X''$$

$$\Downarrow$$

$$X'S_1 \cong X''S_1 \quad \text{i} \quad \measuredangle XS_1X' \cong \measuredangle XS_1X'' = \text{prav ugao}$$

(naporedni uglovi)

Pa je s sim $x'x''$ $\Rightarrow$ $\sigma_s(X'') = X'$

$$\sigma_A \circ \sigma_s(X) = \sigma_s \circ \sigma_B(X) = X'$$

Pokazali smo da je

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_A \circ \sigma_s(A) = \sigma_s \circ \sigma_B(A) \\ \sigma_A \circ \sigma_s(B) = \sigma_s \circ \sigma_B(B) \\ \sigma_A \circ \sigma_s(X) = \sigma_s \circ \sigma_B(X) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{nekolinearne tačke}]{A, B, X \text{ tri}} \sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$$

q.e.d.

dovoljan uslov

"$\Leftarrow$" : $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \Rightarrow s$ simetrala duži AB

$\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \quad / \circ \sigma_s$ sa desne strane

$$\sigma_A \circ \underbrace{\sigma_s \circ \sigma_s}_{id} = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s \quad \Rightarrow \quad \sigma_A = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s$$

Ako dokažemo da je $\sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s = \sigma_{\sigma_s(B)}$ dobićemo da je

$$\sigma_A = \sigma_{\sigma_s(B)} \quad \text{tj.} \quad A = \sigma_s(B).$$

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti

$$\mu = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s .$$

Neka je $\sigma_s(B)=X$ tj. s simetrala duži BX

$$\gamma(X)=\sigma_s(\sigma_B(\sigma_s(X))) \overset{s \text{ sim } BX}{=\!=\!=} \sigma_s(\sigma_B(B)) = \sigma_s(B) \overset{s \text{ sim } BX}{=\!=\!=} X$$

to je $\gamma(X)=X$. ...(1)

Kako je još

$$\gamma\circ\gamma = \sigma_s\circ\sigma_B\circ\underbrace{\sigma_s\circ\sigma_s}_{id}\circ\sigma_B\circ\sigma_s = \sigma_s\circ\underbrace{\sigma_B\circ\sigma_B}_{id}\circ\sigma_s = \sigma_s\circ\sigma_s = id$$

tj. $\gamma\circ\gamma = id$ ...(2)

to iz (1) i (2) zaključujemo da je γ involutivna transformacija. Prema prethodnom zadatku involutivne transformacije su
- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija.

Ako γ ima samo jednu fiksnu tačku X, γ je centralna simetrija s centrom simetrije u X.
Ako γ ima više od jedne fiksne tačke, γ je osna simetrija ili identitet.

Pretpostavimo da $\exists Y: \gamma(Y)=Y$

$\sigma_s\circ\sigma_B\circ\sigma_s(Y)=Y$ $\quad /\sigma_s$ sa lijeve strane

$$\underbrace{\sigma_s\circ\sigma_s}_{id}\circ\sigma_B\circ\sigma_s(Y)=\sigma_s(Y) \Rightarrow \sigma_B\circ\sigma_s(Y)=\sigma_s(Y) \quad ...(*)$$

Neka je $\sigma_s(Y)=Y'$ tj. s je simetrala duži YY'

$$\sigma_B(\sigma_s(Y))=\sigma_B(Y') \overset{*}{=} Y' \Rightarrow Y'\equiv B \quad \text{tj. } \sigma_s(Y)=B$$

Sad imamo $\sigma_s(X)=B=\sigma_s(Y) \Rightarrow X\equiv Y$

$\Downarrow$

γ ima samo jednu fiksnu tačku i to je tačka X

$$\gamma=\sigma_X=\sigma_{\sigma_s(B)} \Rightarrow \sigma_A=\sigma_s\circ\sigma_B\circ\sigma_s=\sigma_{\sigma_s(B)} \Rightarrow$$

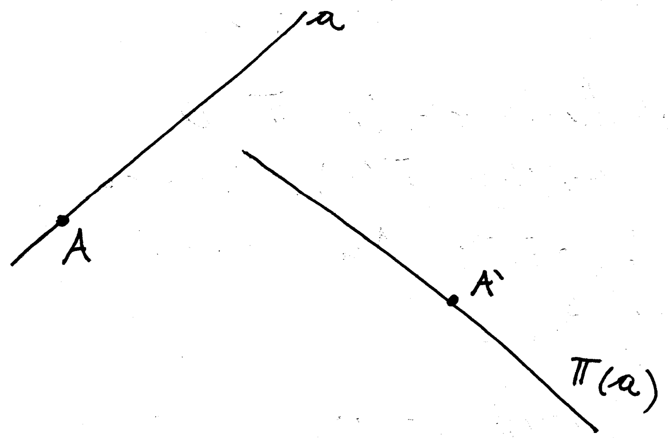
$\Rightarrow \sigma_A = \sigma_{\sigma_s(B)} \Rightarrow \sigma_s(B) = A \Rightarrow s$ simetrala duži AB

q. e. d.

10. Data je transformacija podudarnosti Π. Dokazati da su sve tačke prave $\Pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha = \Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α.
(Fiksna tačka (prava) transformacije Π je svaka tačka A (prava a) za koju je $\Pi(A) = A$ (tj. $\Pi(a) = a$).)

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \text{transformacija podudarnosti } \Pi \\ \text{prava } a \\ \text{prava } \Pi(a) \\ \text{transform. podud. } \alpha = \Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall x \in \Pi(a) \;\; \alpha(x) = x \\ \text{i} \;\; \alpha = ? \end{array}$$



Uzmimo proizvoljnu tačku $A' \in \Pi(a)$.
To znači $\exists A \in a : \Pi(A) = A'$.

$$\alpha(A') = \Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1}(A') =$$

$$= \Pi(\sigma_a(\Pi^{-1}(A'))) = \Pi(\sigma_a(\Pi^{-1}(\Pi(A))))$$

$$= \Pi(\sigma_a(A)) \overset{A \in a}{=\!=} \Pi(A) = A'$$

tj. dobio sam $\alpha(A') = A'$.

Kako je A' proizvoljna tačka prave $\Pi(a)$ to $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sve tačke prave $\Pi(a)$ su fiksne tačke transformacije

q. e. d.

Odredimo šta predstavlja transformacija podudarnosti α.

$$\alpha \circ \alpha = \Pi \circ \sigma_a \circ \underbrace{\Pi^{-1} \circ \Pi}_{\substack{id \\ \text{(neutralni element za kompoziciju)}}} \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} = \Pi \circ \sigma_a \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} = \Pi \circ \Pi^{-1} = id \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha$ je invultivna transformacija, što znači α može biti:
- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija

α nije centralna simetrija.

Pitanje: Zašto?

(pomoć: centralna simetrija ima tačno jednu fiksnu tačku.)

Ako bi bilo $\alpha = id \Rightarrow \Pi \circ \mathcal{G}_a \circ \Pi^{-1} = id$ $\quad / \circ \Pi$ sa desne str.

$\Pi \circ \mathcal{G}_a \circ \Pi^{-1} \circ \Pi = id \circ \Pi = \Pi \Rightarrow \Pi \circ \mathcal{G}_a = \Pi$ $\quad / \circ \Pi^{-1}$ sa lijeve str.

$\Pi^{-1} \circ \Pi \circ \mathcal{G}_a = \Pi^{-1} \circ \Pi$

$\mathcal{G}_a = id$

#kontradikcija

(osna simetrija nije identitet)

Ostaje nam da je α osna simetrija

(čije su sve tačke prave $\Pi(a)$ fiksne tačke)

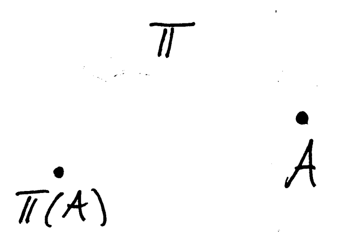
$\Rightarrow$ prava $\Pi(a)$ je osa simetrije tj. $\alpha = \mathcal{G}_{\Pi(a)}$.

11. Data je transformacija podudarnosti Π u ravni. Dokazati da je samo tačka $\Pi(A)$ fiksna tačka transformacije $\alpha = \Pi \circ \mathcal{G}_A \circ \Pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti transformaciju α.

Rj. transformacija podudarnosti Π
tačka A
tačka $\Pi(A)$
transformacija $\alpha = \Pi \circ \mathcal{G}_A \circ \Pi^{-1}$

$\Rightarrow$
$\alpha(\Pi(A)) = \Pi(A)$
$\forall \Pi(x) \neq \Pi(A) \quad \alpha(\Pi(x)) \neq \Pi(x)$
$\alpha = ?$

Provjerimo da li je tačka $\Pi(A)$ fiksna tačka transformacije podudarnosti α.



$\alpha(\Pi(A)) = \Pi \circ \mathcal{G}_A \circ \Pi^{-1}(\Pi(A)) = \Pi(\mathcal{G}_A(\underbrace{\Pi^{-1}(\Pi(A))}_{A})) =$

$= \Pi(\mathcal{G}_A(A)) = \Pi(A)$

dobi sam da je $\alpha(\Pi(A)) = \Pi(A)$

$\Pi(A)$ je fiksna tačka tačka transformacije α

Pretpostavimo da pored tačke $\pi(A)$ $\exists\, \pi(X)$ takva da je

$$\alpha(\pi(X)) = \pi(X)$$

$$\pi \circ \sigma_A \circ \pi^{-1}(\pi(X)) = \pi(\sigma_A(\underbrace{\pi^{-1}(\pi(X))}_{X})) = \pi(\sigma_A(X)) = \pi(X)$$

$$\pi \circ \sigma_A(X) = \pi(X) \quad / \circ \pi^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$\sigma_A(X) = X \quad \Rightarrow \quad A \equiv X$ pa zaključujemo da je

$\pi(A)$ jedina fiksna tačka transformacije α

q.e.d.

odredimo α

$$\alpha \circ \alpha = \pi \circ \sigma_A \circ \underbrace{\pi^{-1} \circ \pi} \circ \sigma_A \circ \pi^{-1} = \pi \circ \underbrace{\sigma_A \circ \sigma_A} \circ \pi^{-1} = \pi \circ \pi^{-1} = id$$

$\Rightarrow \alpha$ involtivna transformacija

pa je
a) α identitet ili
b) α osna simetrija ili
c) α centralna simetrija

α nije osna simetrija. Zašto?
α nije identitet. Zašto?

$\Rightarrow \alpha$ je centralna simetrija sa centrom u tački $\pi(A)$

$$\alpha = \pi \circ \sigma_A \circ \pi^{-1} = \sigma_{\pi(A)} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sigma_{\pi(A)}$$

q.e.d.

12. Riješimo na drugi način dovoljan uslov zadatka 9.

Rj. $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \quad \Rightarrow \quad s$ simetrala duži AB

$\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \quad / \circ \sigma_s$ sa lijeve strane

$\sigma_B = \sigma_s \circ \sigma_A \circ \sigma_s$ pa na osnovu prethodnog zadatka i kako je $\sigma_s = \sigma_s^{-1}$

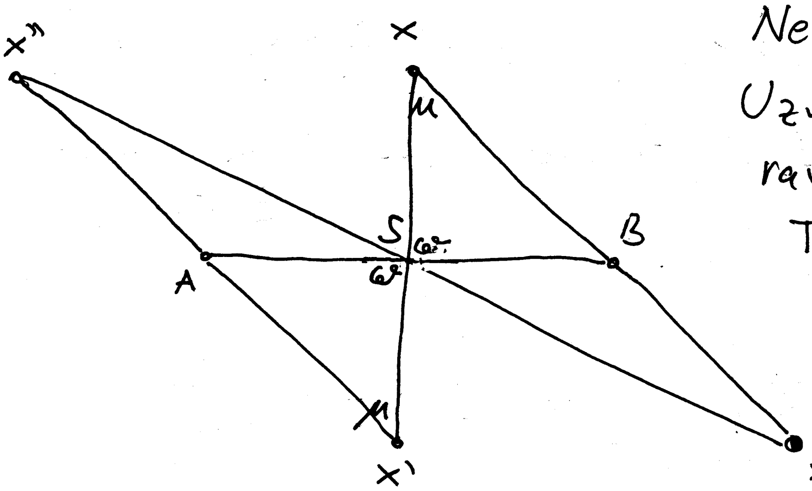
$\Rightarrow \sigma_B = \sigma_s \circ \sigma_A \circ \sigma_s^{-1} = \sigma_{\sigma_s(A)} \Rightarrow \sigma_B = \sigma_{\sigma_s(A)} \Rightarrow B = \sigma_s(A) \Rightarrow s$ sim AB

q.e.d.

13. Dokazati da je S sredina duži AB akko vrijedi $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.

Rj. potreban uslov

„$\Rightarrow$": S sredina duži $AB \Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$



Neka je S sredina duži AB. Uzmimo proizvoljnu tačku iz ravni $X \notin p(A,B)$.
Tačke A, B i X su nekolinearne.
Da bi dokazali jednakost
$$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$$
trebamo dokazati da je tačna na tri nekolinearne tačke.

Dokaz za tačke A i B ostavljamo za vježbu.
Dokažimo za tačku X, X proizvoljna tačka ravni.

$\sigma_A \circ \sigma_S(X) = \sigma_A(\sigma_S(X)) = \sigma_A(X') = X'' \Rightarrow$ S sredina duži XX', A sredina duži $X'X''$

$\sigma_B(X) = X''' \Rightarrow$ B sredina duži XX'''.

Trebam dokazati da je S sredina duži $X''X'''$.

$$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ \measuredangle XSB \cong \measuredangle ASX' = \omega \text{ (unakrsni uglovi)} \\ AS = BS \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ASX' \cong \Delta XSB$$
$$\Downarrow$$
$$AX' \cong BX \text{ i}$$
$$\text{i } \measuredangle SXB \cong \measuredangle SX'A = \mu$$

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ sredina } XX'' \Rightarrow BX \cong BX''' \\ A \text{ sredina } X'X'' \Rightarrow AX' \cong AX'' \\ \qquad\qquad AX' \cong BX \end{array}\right\} \Rightarrow X'X'' \cong XX'''$$

$$\left.\begin{array}{l} X'X'' \cong XX''' \\ \measuredangle X''X'S = \measuredangle SXX''' = \mu \\ XS = X'S \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta X''X'S \cong \Delta SXX'''$$
$$\Downarrow$$
$$X''S \cong X'''S$$

Pitanje: Zašto je S sredina duži $x''x'''$?

Znači $\sigma_S(x''') = x''$

Dobili smo
$$\left.\begin{aligned} \sigma_A \circ \sigma_S(x) &= x'' \\ \sigma_S \circ \sigma_B(x) &= x'' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_S(x) = \sigma_S \circ \sigma_B(x)$$

Prema tome, dobili smo
$$\left.\begin{aligned} \sigma_A \circ \sigma_S(A) &= \sigma_S \circ \sigma_B(A) \\ \sigma_A \circ \sigma_S(B) &= \sigma_S \circ \sigma_B(B) \\ \sigma_A \circ \sigma_S(x) &= \sigma_S \circ \sigma_B(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$$

q.e.d.

dovoljan uslov

„$\Leftarrow$": $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \Rightarrow S$ sredina duži AB

$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \quad / \circ \sigma_S$ sa desne strane

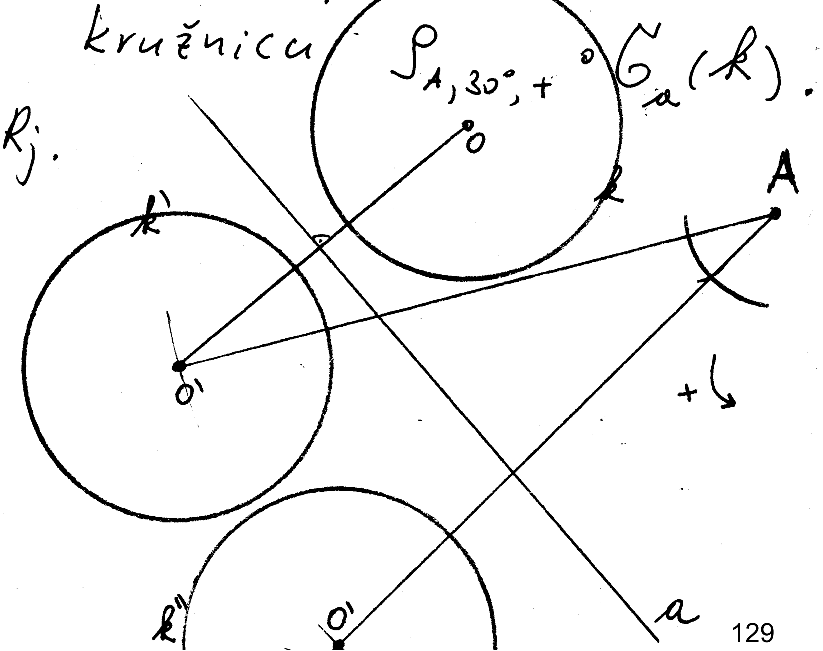
$\sigma_A = \sigma_S \circ \sigma_B \circ \sigma_S$ kako je $\sigma_S = \sigma_S^{-1}$ na osnovu 11. zadatka

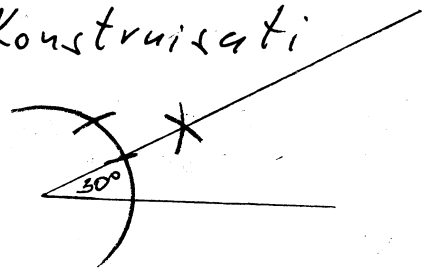
$\sigma_A = \sigma_{\sigma_S(B)} \Rightarrow A = \sigma_S(B) \Rightarrow S$ sredina duži AB

q.e.d.

(14.) Date su prava a, tačka A i kružnica k. Konstruisati kružnicu $\rho_{A,30°,+} \circ \sigma_a(k)$.

Rj.

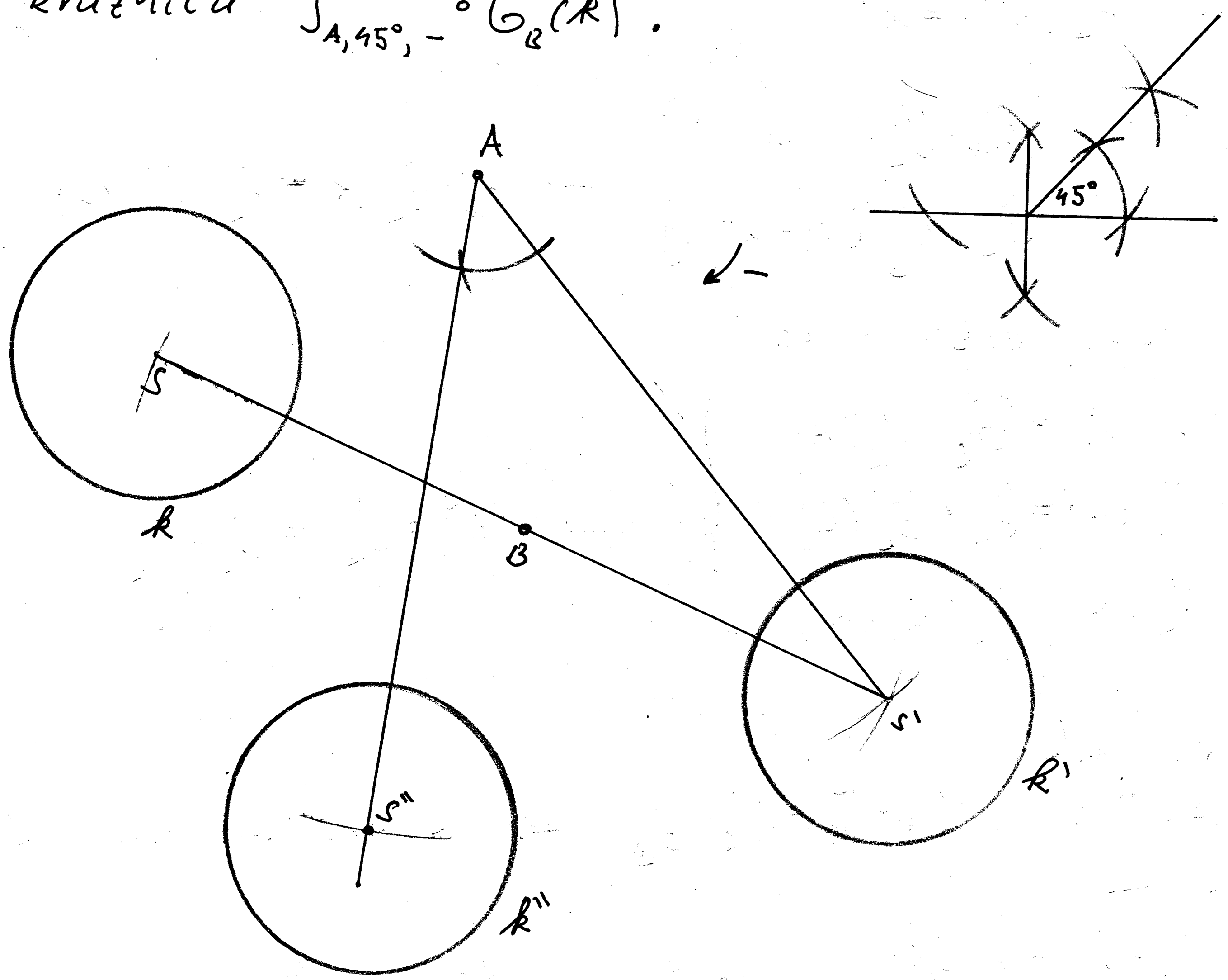




$$\rho_{A,30°,+} \circ \sigma_a(k) = \rho_{A,30°,+}(\sigma_a(k))$$
$$= \rho_{A,30°,+}(k') = k''$$

15. Date su tačke A i B i kružnica k. Konstruisati kružnicu $\rho_{A,45^\circ,-} \circ \sigma_B(k)$.

Rj.



$$\rho_{A,45^\circ,-} \circ \sigma_B(k) = \rho_{A,45^\circ,-}(\sigma_B(k)) = \rho_{A,45^\circ,-}(k') = k''$$

16. Date su proizvoljne tačke T, S, prava a i ΔABC. Konstruisati trouglove:

a) $\sigma_a \circ \rho_{T,60^\circ,+}(\Delta ABC)$;

b) $\sigma_S \circ \rho_{T,90^\circ,-} \circ \sigma_a(\Delta ABC)$.

Zadaci za vježbu:

17. Ako je Π transformacija podudarnosti za koju važi $\Pi(A)=A$, $\Pi(B)=B$, $\Pi(C)=C$, gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je Π identička transformacija. Dokazati.

18. Neka je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako se prave a i b sijeku u tački S, tada se i prave c i d sijeku u tački S;

b) Ako su prave a i b normalne na pravu s, tada su i prave c i d normalne na pravu s.

19. Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju istom pramenu pravih.

Napomena: Pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku (eliptičan pramen) ili skup svih pravih koje su normalne na istu pravu (hiperboličan pramen).

20. Ako su a, b i c tri prave iz istog pramena, tada je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$. Dokazati.

21. Dokazati da je tačka A incidentna sa pravom s ako i samo ako je $\sigma_s \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \sigma_s$.

22. Dokazati da su prave a i b uzajamno normalne ako i samo ako je $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$.

23. Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F) = F$.

24. Ako ravna figura ima tačno dvije ose simetrije, tada su one uzajamno normalne. Dokazati

25. Koliko centara simetrije može da ima ravna figura?

26. Dokazati da se raznostraničan trougao, tj. trougao koji nema podudarnih stranica, ne može podijeliti jednom pravom na dva podudarna trougla.

27. Na koliko načina se jednakostraničan trougao može podijeliti jednom pravom na dva podudarna trougla?

Upute:

Za 23. - Neka je $\sigma_a(F) = F$, $\sigma_b(F) = F$ i $c = \sigma_b(a)$. Tada je (Zašto?) $\sigma_c(F) = \sigma_{\sigma_b(a)}(F) = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b(F) = F$.

Za 24. - Ako su a i b, $a \neq b$, jedine ose simetrije figure F, tada je, (na osnovu ?) ili $\sigma_a(b) = a$ ili $\sigma_a(b) = b$. U prvom je slučaju $b \equiv a$, što je suprotno uslovu zadatka, a u drugom $a \perp b$, što i treba da se dokaže.

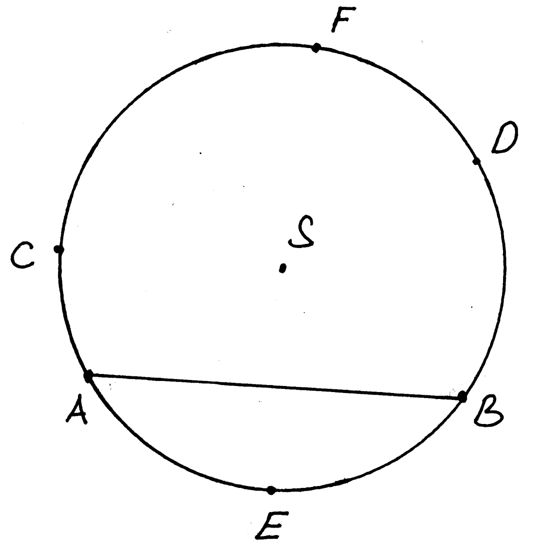
Za 25. - 0, 1 ili ∞. Pokazati da ukoliko neka figura ima više od jednog centra simetrije, tada ih ima beskonačno

Za 26. - Pretpostavimo da se trougao ΔABC $(AB > BC > CA)$ može podijeliti pravom na dva podudarna trougla. Očigledno, ta prava je incidentna sa nekim tjemenom trougla. Neka je to tjeme A. Obilježimo sa D tačku u kojoj siječe stranicu BC...

Za 27. - Na tri načina...

Centralni i periferiski ugao

Posmatrajmo kružnicu s centrom u tački S poluprečnika r ($k(S,r)$).



Duž AB je tetiva kruga

$\sphericalangle ASC$ zovemo centralni ugao nad tetivom AB ili centralni ugao nad lukom $\overset{\frown}{AEB}$.

Uglovi $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AFB$ ili $\sphericalangle ADB$ zovemo oštri periferiski uglovi nad tetivom AB ili oštri periferiski uglovi nad lukom $\overset{\frown}{AEB}$.

$\sphericalangle AEB$ zovemo tupi periferiski ugao nad tetivom AB ili tupi periferiski ugao nad lukom $\overset{\frown}{AFB}$ (ili $\overset{\frown}{ACB}$ ili $\overset{\frown}{ADB}$).

\# ✓ Oko trougla $\triangle KLM$, čiji uglovi su $\sphericalangle MKL = 51°$ i $\sphericalangle KML = 41°$ je opisana kružnica. Tačka N je proizvoljna tačka kružnice koja pripada onom dijelu luka KL u kojoj nije tačka M. Izračunati $\sphericalangle KNL + \sphericalangle KNM$.

Rješenje: $\sphericalangle KNL + \sphericalangle KNM = 227°$

\# ✓ Oko trougla $\triangle EDA$ je opisana kružnica $k(S,r)$ gdje se centar S nalazi unutar trougla. Ako je $\sphericalangle ESD = 80°$ i $\sphericalangle SDA = 40°$ izračunati $\sphericalangle AES$.

Rješenje: $\sphericalangle AES = 10°$.

\# ✓ Oko trougla $\triangle INE$ je opisana kružnica k. Tačka H je tačka na kružnici koja pripada onoj poluravni sa ivicom u $p(I,N)$ u kojoj nije tačka E. Ako je $\sphericalangle EHN = 55°$ i $\sphericalangle IEN = 70°$ izračunati $\sphericalangle INE$.

Rješenje: $\sphericalangle INE = 55°$.

(#) Dokazati da je oštar periferiski ugao nad tetivom jednak polovini centralnog ugla nad istom tetivom.

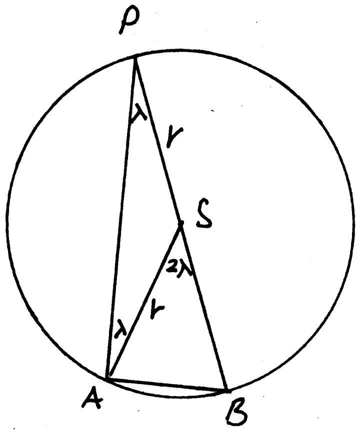
Rj. Razmotrimo tri slučaja koja se mogu desiti

1° centar S kružnice pripada jednom kraku periferiskog ugla

2° centar S kružnice pripada unutrašnjoj oblasti periferiskog ugla

3° centar S kružnice pripada vanjskoj oblasti periferiskog ugla

1°



AB tetiva

$\measuredangle APB$ oštri periferiski ugao nad tetivom AB

$S \in PB$, $\measuredangle ASB$ centralni ugao nad tetivom AB

ΔASP je jkk $(AS \cong SP = r)$

$\Rightarrow \measuredangle SAP \cong \measuredangle SPA = \lambda$

$\measuredangle ASB$ vanjski ugao $\Delta ASP \Rightarrow \measuredangle ASB = 2\lambda$

$\Rightarrow \measuredangle APB = \frac{1}{2}\measuredangle ASB$

q.e.d.

2° CD tetiva

$\measuredangle CQD$ oštar periferiski ugao nad tetivom CD

$S \in$ unutrašnjosti $\measuredangle CQD$

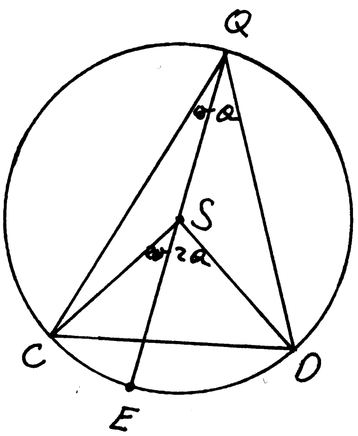
$\measuredangle CSD$ centralni ugao nad tetivom

Neka je QE prečnik kružnice

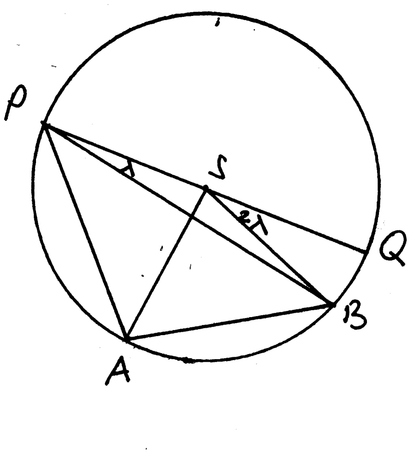
Tada na osnovu prvog slučaja imamo

$$+\left.\begin{aligned}\measuredangle CQE &= \tfrac{1}{2}\measuredangle CSE\\ \measuredangle DQE &= \tfrac{1}{2}\measuredangle DSE\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{(sabereno)}} \measuredangle CQD = \tfrac{1}{2}\measuredangle CSD$$

q.e.d.



3°



AB tetiva

$\measuredangle APB$ oštar periferiski ugao

$S \in$ vanjskoj oblasti $\measuredangle APB$

Označimo sa PQ prečnik kružnice

Tada prema prvom slučaju možemo zaključiti,

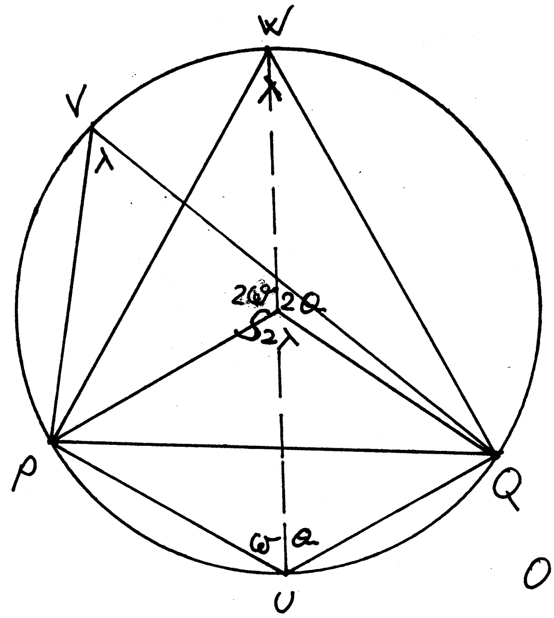
$$\left.\begin{aligned}\measuredangle APQ &\cong \tfrac{1}{2}\measuredangle ASQ\\ \measuredangle BPQ &\cong \tfrac{1}{2}\measuredangle BSQ\end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{oduzmemo}]{\text{ako ova dva ugla}}$$

$$\measuredangle APB \cong \tfrac{1}{2}\measuredangle ASB$$

q.e.d.

Dokazati da je suma oštrog i tupog periferiskog ugla nad istom tetivom 180°.

Rj.



PQ tetiva

$\measuredangle PUQ$ tupi periferiski ugao nad tetivom PQ

$\measuredangle PVQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

Dokažimo da je $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$.

Neka je $\measuredangle PSQ$ centralni ugao nad tetivom PQ.

Tada je $\measuredangle PVQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ$. ...(*)

Označimo sa W tačku na kružnici tako da je UW prečnik kružnice.

Tada je $\measuredangle PWQ$ oštri periferiski ugao nad tetivom PQ

pa je $\measuredangle PWQ = \frac{1}{2}\measuredangle PSQ \overset{(*)}{\Rightarrow} \measuredangle PVQ = \measuredangle PWQ = \lambda$.

Ako uvedemo oznake $\measuredangle PUW = \omega$ i $\measuredangle QUW = \theta$

(ovo su oštri periferiski uglovi nad tetivama PW i QW)

tada na osnovu prvog zadatka imamo

$\measuredangle PSW = 2\omega$ i $\measuredangle QSW = 2\theta$.

Sad imamo $2\lambda + 2\omega + 2\theta = 360°$ $/:2$

$\lambda + \omega + \theta = 180°$

tj. $\measuredangle PVQ + \measuredangle PUQ = 180°$

q.e.d.

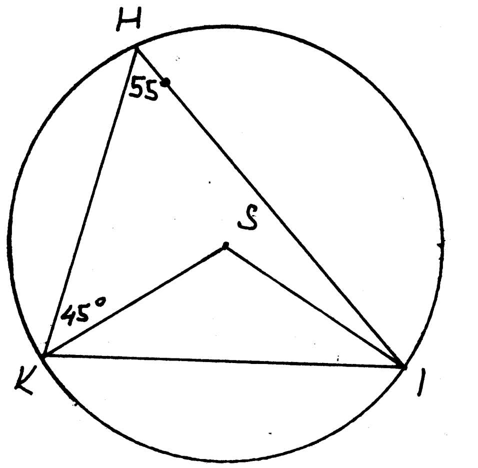
Posljedice ova dva zadatka su

a) svi oštri (ili tupi) periferiski uglovi nad istom tetivom su podudarni

b) periferiski ugao nad prečnikom je prav.

Oko trougla $\triangle KIH$ je opisana kružnica $k(S,r)$. Ako je $\measuredangle KHI = 55°$ i $\measuredangle SKH = 45°$ izračunati ostale uglove u trouglu.

Rj.



$\measuredangle KHI = 55° \Rightarrow \measuredangle KSI = 110°$

$\measuredangle KSI = 110°$ i $\triangle KIS$ jk $\Rightarrow \measuredangle SKI \cong \measuredangle KIS$

$\measuredangle KIS = \dfrac{180° - 110°}{2} = 35° = \measuredangle SKI$

$\measuredangle HKI = 45° + 35° = 80°$

$\measuredangle KHI = 55°$

$\measuredangle KIH = 180° - 80° - 55° = 45°$

Četiri važne tačke za trougao su

a) ortocentar (sjecište visina trougla)
(mi ćemo ga označavati sa slovom H)

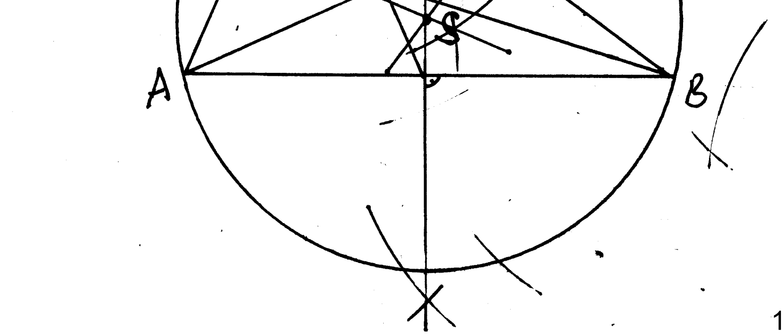
b) centar opisane kružnice (sjecište simetrala stranica)
(mi ćemo ga označavati sa slovom S)

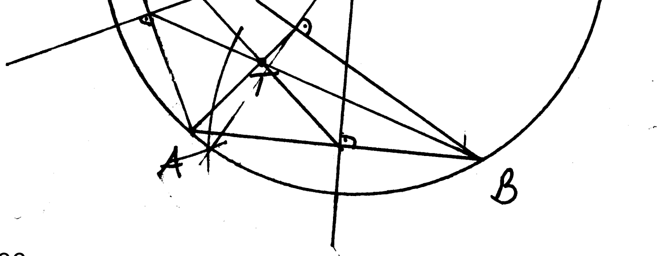
c) centar upisane kružnice (sjecište simetrale uglova)
(mi ćemo ga označavati sa slovom I)

d) težište (presjek težišnica)
(mi ćemo ga označavati sa slovom T)

Datom oštrouglom i tupouglom trouglu opisati kružnice i naći težište trougla.

Rj.





Tetivni četverougao

Četverougao oko koga se može opisati kružnica zove se tetivni četverougao.

Potrebni i dovoljni uslovi da četverougao bude tetivni:

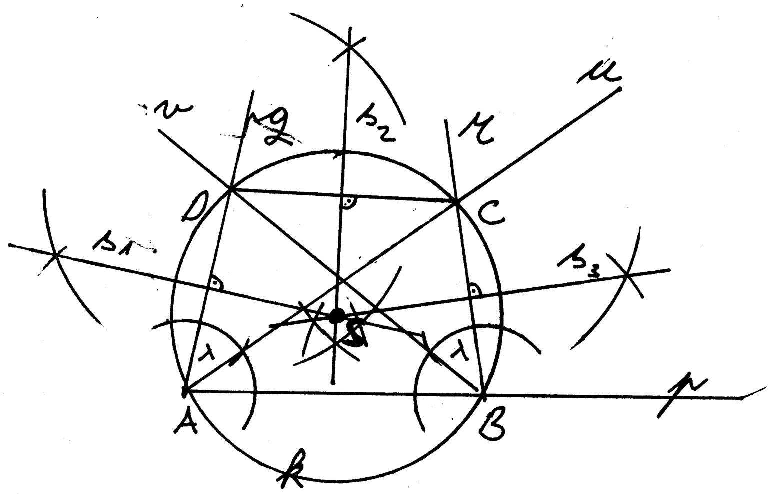
a) da mu suma dva naspremna ugla četverougla iznosi $180°$

b) da su mu uglovi pod kojima se vidi bilo koja stranica iz druga dva vrha jednaki

c) da vrijedi $SA \cdot SC = SB \cdot SD$ gdje je S presjek dijagonala.

(1.) Nacrtati četverougao $\square ABCD$ oko koga možemo opisati kružnicu, pa nacrtati kružnicu.

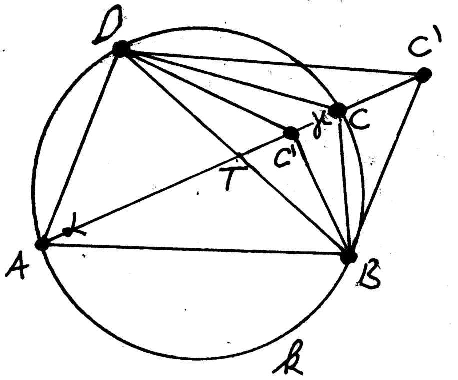
Konstrukcija



1. pp p sa početnom tačkom A
2. pp q sa početnom tačkom A ($p \neq q$)
3. proizvoljni ugao λ tako da je $\lambda < \measuredangle pAq$
4. pp r sa početnom tačkom B, gdje je B proizvoljna tačka poluprave p, tako da je $\measuredangle ABr > \lambda$.
5. pp u taka da $\measuredangle qAu = \lambda$ i pp u se nalazi sa one strane pp q sa koje je i pp p
6. pp v taka da $\measuredangle rBv = \lambda$ i pp v se nalazi sa one strane pp r sa koje je pp q.
7. $u \cap r = \{C\}$, $v \cap q = D$
8. $\square ABCD$
9. simetrale s_1, s_2, s_3 redom stranica AD, CD i BC
10. $s_1 \cap s_2 \cap s_3 = \{S\}$
11. $k(S, SA)$

(#) Dat je četverougao $\square ABCD$ kod koga je $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180°$. Dokazati da je četverougao tetivni.

Rj.



Označimo sa $\alpha = \sphericalangle DAB$ i $\gamma = \sphericalangle BCD$.
Znamo da je $\alpha + \gamma = 180°$
Neka je k kružnica opisana oko trougla $\triangle ABD$.
Označimo sa T presjek dijagonala četverougla.

Neka $pp[A,T) \cap k = \{C'\}$. Moguć je jedan od sljedeća tri slučaja
a) $A - C - C'$
b) $A - C' - C$
c) $C \equiv C'$

Znamo da suma oštrog i tupog periferiskog ugla iznosi $180°$.

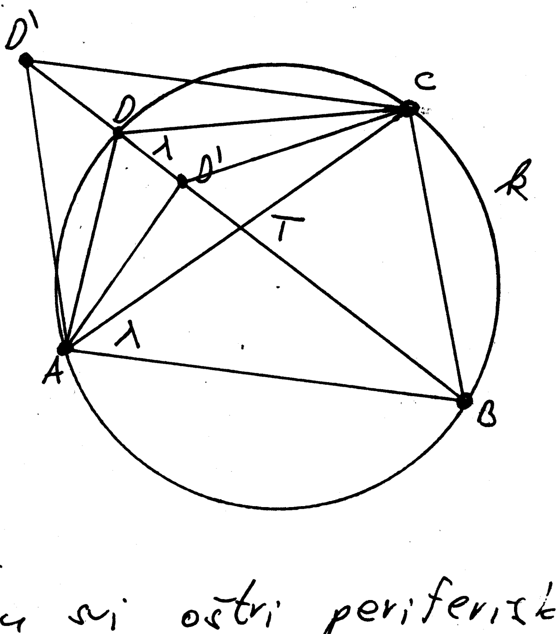
Ako bi bio slučaj pod a) ili pod b) došli bi do kontradikcije (KAKO?). Prema tome mora biti slučaj pod c) tj. četverougao je tetivni
q.e.d.

(#) Dat je četverougao $\square ABCD$. Ako je $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle CDB = \lambda$ dokazati da je četverougao tetivni.

Rj. Označimo sa T presjek dijagonala četverougla. Neka je k kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$.

$pp[B,T) \cap k = \{D'\}$

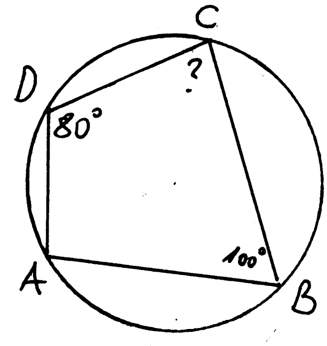
Moguć je jedan od sljedeća tri slučaja
a) $B - D' - D$
b) $B - D - D'$
c) $D \equiv D'$



Posmatrajmo tetivu BC. Znamo da su svi oštri periferiski uglovi nad istom tetivom podudarni. Ako bi pretpostavili da je slučaj pod a) ili pod b) došli bi do kontradikcije (KAKO?) Prema tome mora biti slučaj pod c) tj. četverougao je tetivni.
q.e.d.

\# U tetivnom četverouglu $\square ABCD$ je ugao pod B 100°. Izračunati ugao pod C.

Rj.



$\square ABCD$ tetivni

$\sphericalangle B = 100^\circ \Rightarrow \sphericalangle CDA = 80^\circ$

Ugao pod C se ne može izračunati.

\# U četverouglu $\square ABCD$ je $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90^\circ$.

a) Da li je ovaj ugao tetivni?

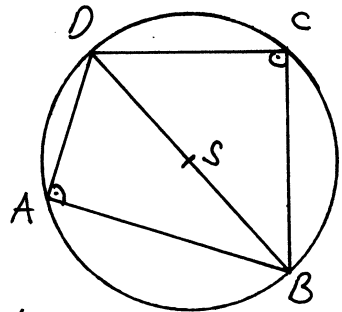
b) Ukoliko jeste odrediti gdje leži njegov centar opisane kružnice?

Rj. a) Suma dva naspremna ugla četverougla iznosi 180° pa je $\square ABCD$ tetivni.

b) Ugao nad prečnikom je prav.

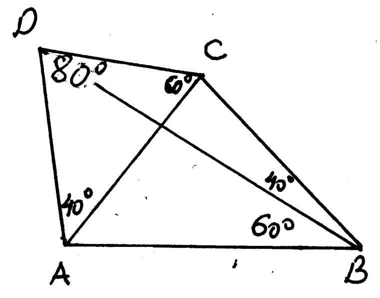
BD je prečnik opisane kružnice

$\Rightarrow$ centar S opisane kružnice se nalazi na sredini dijagonale BD.



\# U četverouglu $\square ABCD$ je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 40^\circ$. Ako je $\sphericalangle D = 80^\circ$ izračunati $\sphericalangle DBA$ i $\sphericalangle BAC$.

Rj.



$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 40^\circ \Rightarrow \square ABCD$ je tetivni

$\sphericalangle D = 80^\circ \Rightarrow \sphericalangle B = 100^\circ \Rightarrow \sphericalangle DBA = 60^\circ$.

$\sphericalangle BAC$ se ne može izračunati.

\# Četverougao $\square AVOM$ je upisan u kružnica k i $\{S\} = AO \cap VM$. Ako su $\sphericalangle VAO = 40^\circ$ i $\sphericalangle AOM = 70^\circ$ odrediti ugao $\sphericalangle OSV$.

Rješenje $\sphericalangle OSV = 110^\circ$.

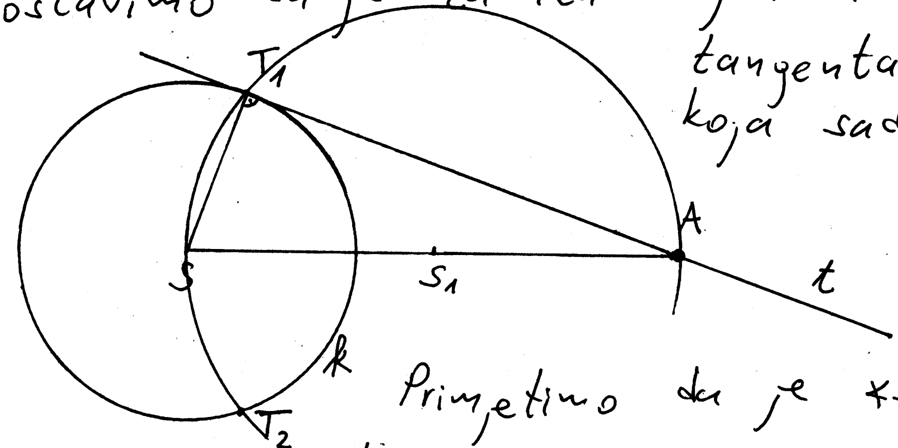
Tangenta na kružnicu

Tangenta na kružnicu je prava koja dodiruje kružnicu.

1. Iz date tačke van date kružnice konstruisati tangentu na tu kružnicu.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je t tražena tangenta na kružnicu $k(S,r)$ koja sadrži tačku A.



Označimo sa T_1 dodirnu tačku tangente i kružnice.

Primjetimo da je $\sphericalangle ST_1A = 90^\circ$ pa je centar opisane kružnice ΔAT_1S na sredini duži AS. Kako su tačke A i S date to nije teško konstruisati tačku T a poslije toga i tangentu $t = p(A, T_1)$.

Konstrukcija

1. $k(S,r)$, A van date kružnice
2. sredinu duži AS (tačku S_1)
3. $k(S_1, S_1S) \cap k = \{T_1, T_2\}$
4. $t_1 = p(A, T_1)$, $t_2 = p(A, T_2)$

NACRTATI SLIKU

Dokaz

Trebamo dokazati da su konstruisane prave t_1 i t_2 tangente na krug $k(S,r)$. Ovo slijedi iz analize i konstrukcije. (U Analizi smo se pozvali na osobinu pravouglog trougla da mu je centar opisane kružnice na sredini hipotenuze. Ovo nećemo dokazivati zato što podrazumijevamo da je to poznato od ranije).

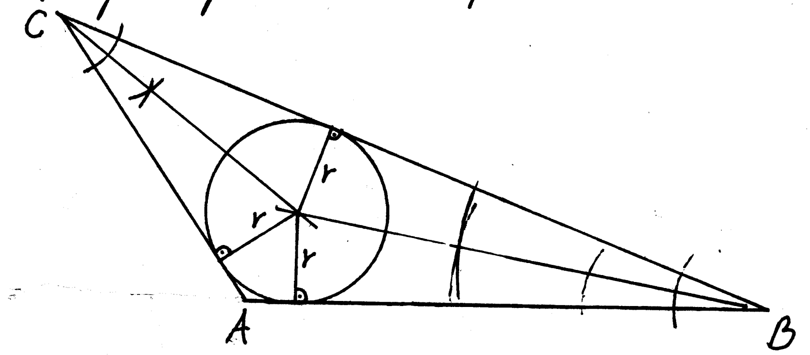
Diskusija

Zadatak uvijek ima dva rješenja.

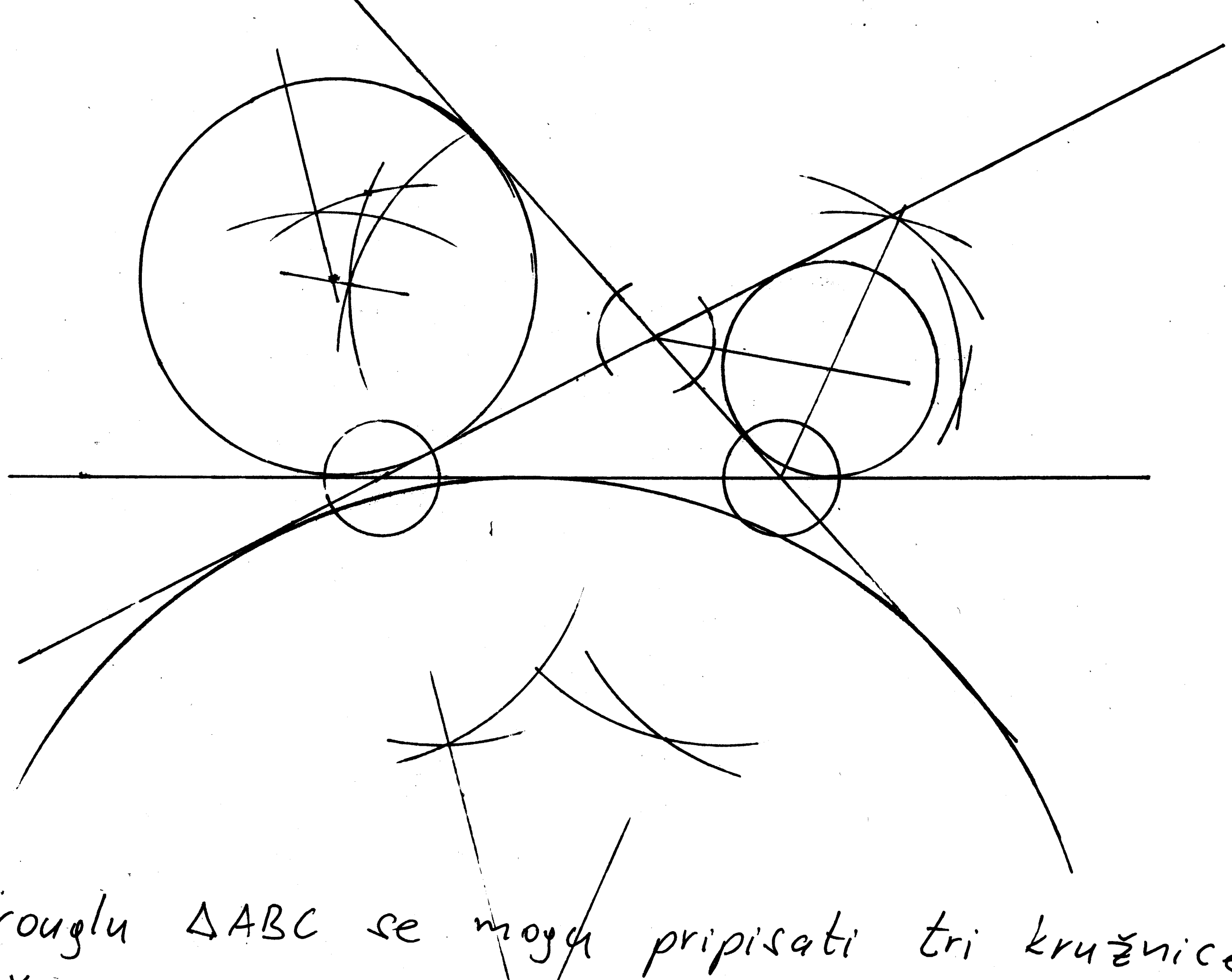
Napomena: Duži AT_1 i AT_2 zovu se odsječci tangente i vrijedi $AT_1 \cong AT_2$ (Dokaz slijedi iz podudarnosti dvije stranice ($ST_1 \cong ST_2$, $SA \cong SA$) i ugla (90°)).

2. Datom tupouglom trouglu upisati kružnicu i na slici označiti poluprečnik upisane kružnice.

Rj.:



3. Datom trouglu $\triangle ABC$ pripisati kružnicu koja dodiruje stranicu AC.



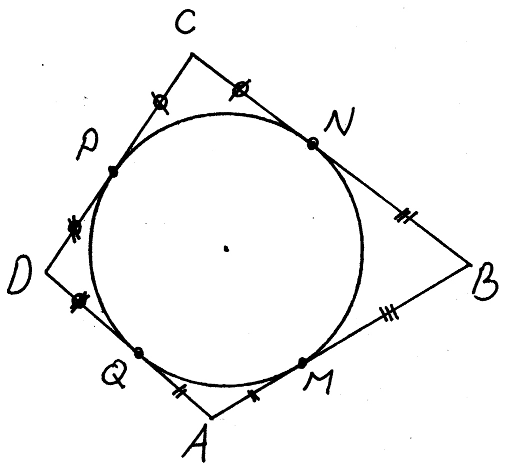
Trouglu $\triangle ABC$ se mogu pripisati tri kružnice.

4. U trouglu $\triangle ABC$ je upisana kružnica $k(I,r)$. Kružnica dodiruje stranicu BC, AC i AB u tačkama D, E i F redom. Ako je $AF=6$, $BD=8$, $CE=7$ i $r=4$ izračunati obim trougla (i površinu).

Rješenja: $O=42$ $P=r\cdot s=84$

Tangentni četverougao

Četverougao u koji se može upisati kružnica zove se tangentni četverougao. Potreban i dovoljan uslov da četverougao $\square ABCD$ bude tangentni jeste $AB+CD \cong BC+AD$.

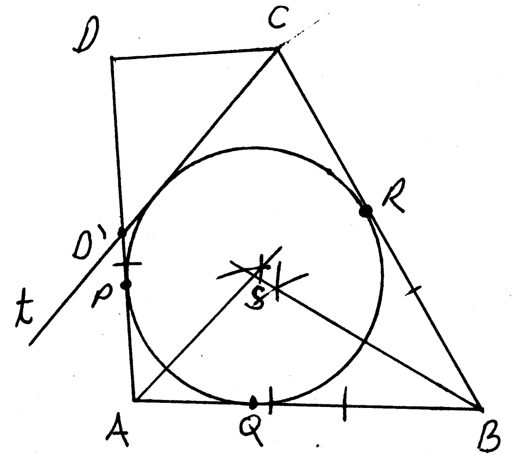


$AM \cong AQ$
$BM \cong BN$
$CN \cong CP$
$DP \cong DQ \quad +$

$$AB+CD \cong BC+AD$$

1\. Dat je četverougao $\square ABCD$. Ako je $AB+CD \cong BC+AD$ dokazati da je tada četverougao tangentni.

Rj.



Označimo sa S presjek simetrale uglova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAD$. Neka je k kružnica koja je upisana u četverougao i koja dodiruje stranice AD, AB i BC. Iz tačke C postavimo tangentu t na kružnicu.

$$\{D'\} = [A,D\rangle \cap t$$

Moguća su sljedeća tri slučaja
a) $A-D'-D$
b) $A-D-D'$
c) $D \equiv D'$

Označimo sa P, Q i R dodirne tačke kružnice sa stranicama AD, AB i BC redom. Imamo

$$\begin{aligned} AB+CD &\cong BC+AD \\ - \quad AB+CD' &\cong BC+AD' \\ \hline CD-CD' &\cong AD-AD' \end{aligned}$$

Kako je $AD-AD' \cong DD'$ imamo:

$$CD-CD' \cong DD' \quad \Rightarrow \quad CD \cong CD'+DD'$$

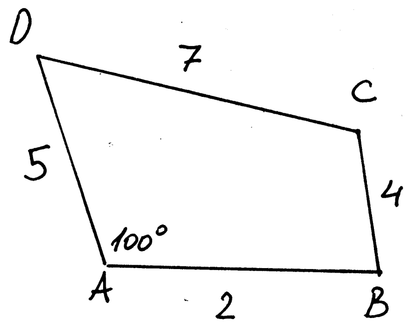
$\#$ kontradikcija (u $\triangle CDD'$ $CD < CD'+DD'$)

Slično bi pokazali da nije ni slučaj pod b).

Prema tome $D \equiv D'$ tj. dati četverougao $\square ABCD$ je tangentni.

2. U četverouglu $\square ABCD$ je $AB=2$, $BC=4$, $CD=7$ i $AD=5$. Ako je $\measuredangle A=100^\circ$ izračunati ugao $\measuredangle C$.

Rj.



$AB+CD \overset{?}{=} BC+AD$

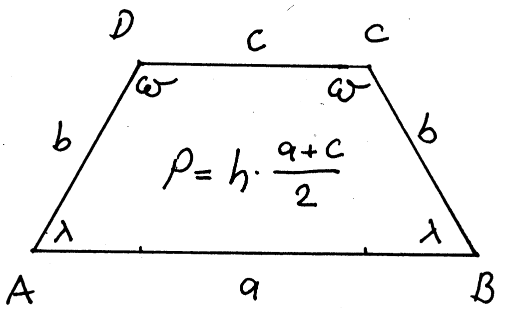
$\square ABCD$ je tangentni

$\measuredangle C$ se ne može izračunati

3. Obrazložiti da li je trapez tetivni ili tangentni četverougao.

Četverougao koji ima tačno jedan par paralelnih stranica zovemo trapez.

Rj. jednakokraki trapez

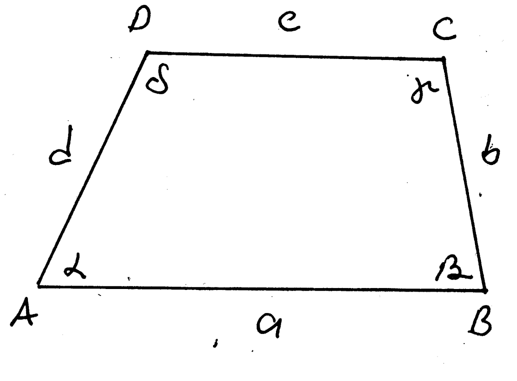


$\measuredangle A+\measuredangle C = \measuredangle B+\measuredangle D = \lambda+\omega = 180^\circ$

jednakokraki trapez jest tetivni četverougao

jednakokraki trapez je tangentni četverougao samo u slučaju kada je $a+c=2b$

trapez



Za opšti slučaj ako ne znamo veličinu uglova ni dužine stranica ne možemo ništa reći

Ako je $a+c \overset{?}{=} b+d$ tada trapez je tangentni četverougao.

Ako je $\alpha+\gamma=180^\circ$ ili $\beta+\delta=180^\circ$ tada je trapez tetivni četverougao.

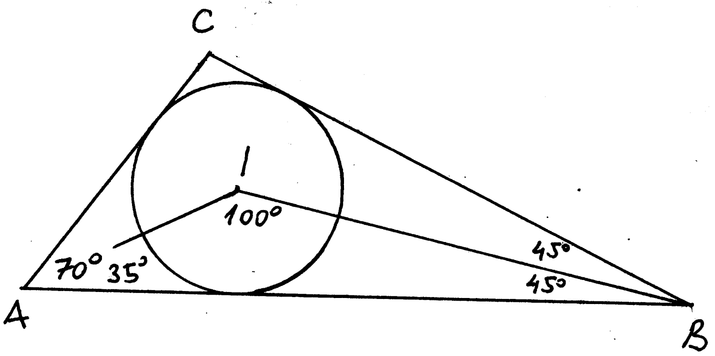
4. U četverouglu $\square KONS$ je upisana kružnica. Ako je $KO=5$, poluprečnik upisane kružnice $r=6$, dijagonala $SO=8$ i stranica $SN=7$ izračunati obim četverougla.

Rješenje: $O_{\square KONS}=24$.

Razni zadaci

1. U trouglu $\triangle ABC$ I je centar upisane kružnice. Ako je ugao $\alpha = 70^\circ$ i $\sphericalangle AIB = 100^\circ$ izračunati ugao γ.

Rj.



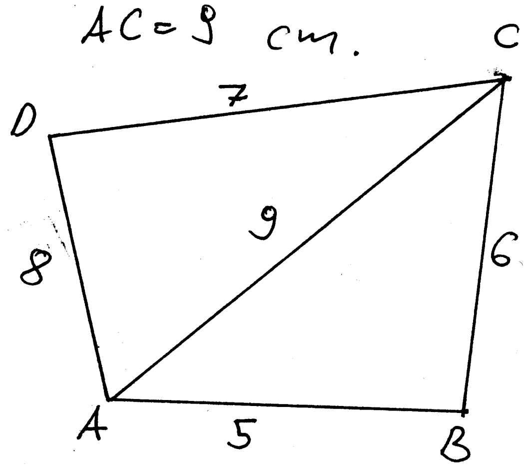
$\alpha = \sphericalangle BAC = 70^\circ \Rightarrow \sphericalangle BAI = 35^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle ABI = 45^\circ$

$\Rightarrow \gamma = 20^\circ$

2. Da li možemo konstruisati četvorougao $\square ABCD$ kod koga je $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 7$ cm, $AD = 8$ cm i $AC = 9$ cm.

Rj.



U $\triangle ABC$ su poznate tri stranice pa ga možemo konstruisati.
U $\triangle ACD$ su poznate tri stranice pa ga možemo konstruisati.
$\square ABCD$ možemo konstruisati

3. Bez analize, dokaza i diskusije konstruisati četvorougao iz prethodnog primera.

Rj. <u>Konstrukcija</u>

1. poluprava p sa početnom tačkom A
2. $k(A, AB) \cap p = \{B\}$
3. $k(A, AC) \cap k(B, BC) = \{C\}$
4. $k(A, AD) \cap k(C, CD) = \{D\}$
5. $\square ABCD$

NACRTATI SLIKU

(#) U $\triangle ABC$ je upisana kružnica sa centrom u I. Dokazati da se centar opisane kružnice oko $\triangle BCI$ nalazi na presjeku $pp[A,I)$ i kružnice koja je opisana oko $\triangle ABC$.

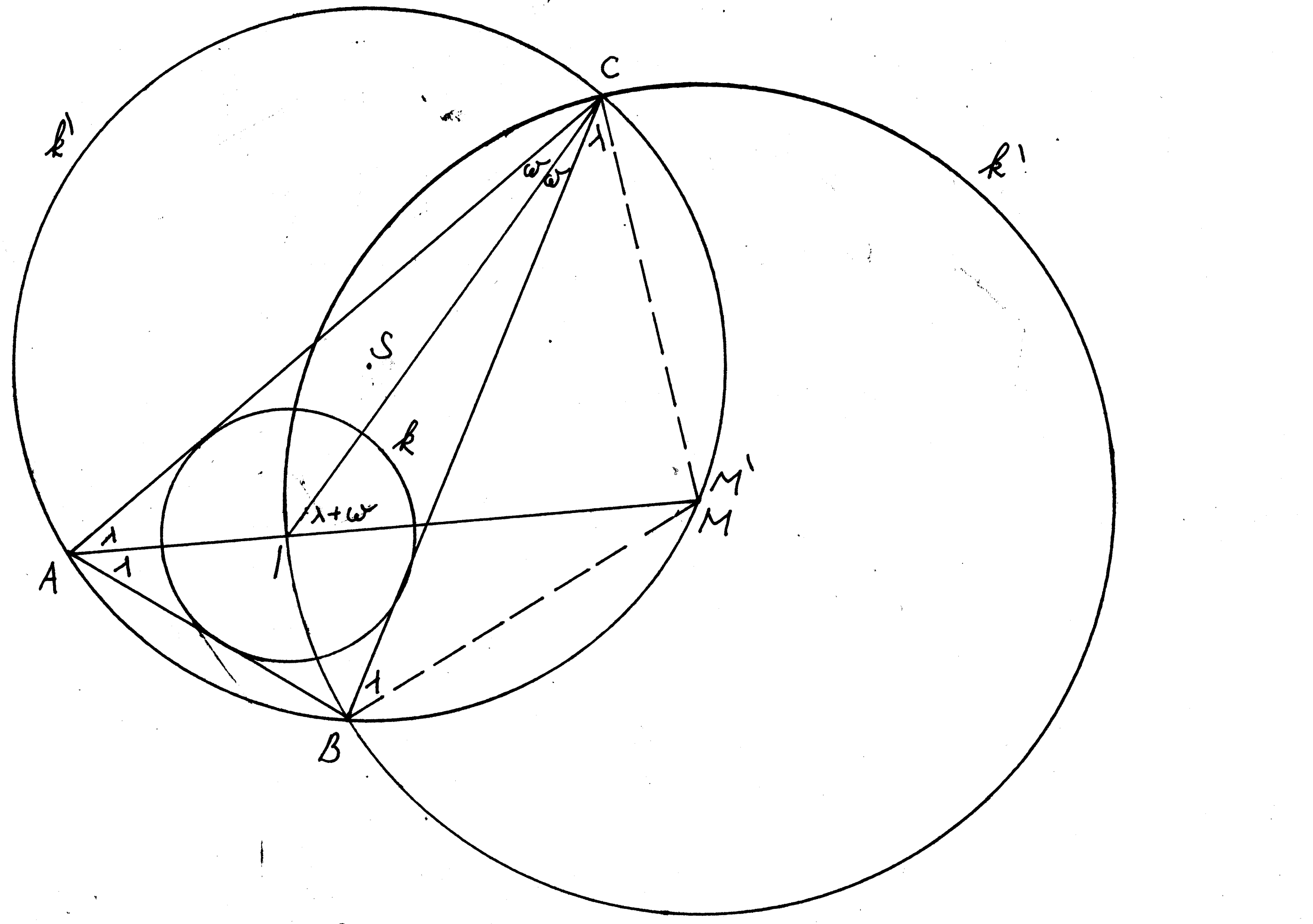
R: postavka zadatka $\triangle ABC$,

$k(I,r)$ upisana kružnica u $\triangle ABC$

$k'(S,r')$ kružnica opisana oko $\triangle ABC$

$k''(M,r'')$ kružnica opisana oko $\triangle BCI$

$\Big\} \Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$



Označimo sa $\{M'\} = pp[A,I) \cap k'$, pa dokažimo da je $M' \equiv M$.

Uvedimo oznake $\sphericalangle CAI \cong \sphericalangle BAI = \lambda$ i $\sphericalangle ACI \cong \sphericalangle BCI = \omega$.

$\square ABM'C$ je tetivni $\Rightarrow \sphericalangle M'BC \cong \sphericalangle CAM' = \lambda$ i $\sphericalangle BCM' \cong \sphericalangle BAM' = \lambda$

$\triangle CBM'$ je jkk sa osnovicom u $BC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice BC ...(*)

$\sphericalangle M'IC$ je vanjski ugao $\triangle AIC \Rightarrow \sphericalangle M'IC = \lambda + \omega$.

$\triangle M'CI$ je jkk sa osnovicom u $IC \Rightarrow M'$ pripada simetrali stranice IC ...(**)

Iz (*) i (**) $\Rightarrow M'$ je centar opisane kružnice $\triangle CIB \Rightarrow M \equiv M'$

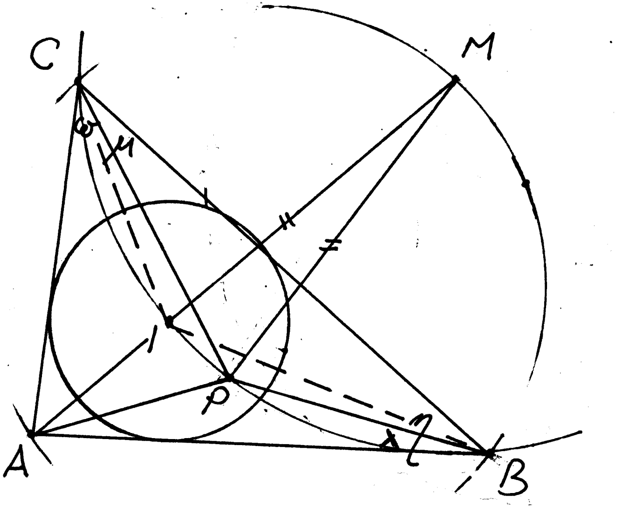
$\Rightarrow pp[A,I) \cap k' = \{M\}$ q.e.d.

(#) Neka je I centar upisane kružnice ΔABC. U unutrašnjosti ΔABC data je tačka P takva da je

$$\measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB.$$

Dokazati da je $AP \geq AI$ te da jednakost vrijedi akko se tačka P podudara sa tačkom I.

Rj.



postavka zadatka

$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ k(I,r) \text{ kružnica upisana u } \Delta ABC \\ P \text{ tačka u unutrašnjosti } \Delta ABC \text{ takva} \\ \quad \measuredangle PBA + \measuredangle PCA = \measuredangle PBC + \measuredangle PCB. \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \quad AP \geq AI$

Uvedimo oznake $\measuredangle PBA = \lambda$, $\measuredangle PCA = \omega$, $\measuredangle PBC = \eta$, $\measuredangle PCB = \mu$.

$\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$

Tada $\left.\begin{array}{l} \lambda + \omega = \mu + \eta \\ \lambda + \omega + \mu + \eta = \beta + \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + \omega = \mu + \eta = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad /:2$

$\dfrac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ pa $\mu + \eta = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$

$\measuredangle BPC = 180^\circ - (\mu + \eta) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} \quad \ldots (*)$

$\measuredangle BIC = 180^\circ - (\measuredangle IBC + \measuredangle ICB) = 180^\circ - \left(\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}\right) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} \quad \ldots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $\square IPBC$ je tetivni četverougao.

Prema prethodnom zadatku centar opisane kružnice ΔBCI se nalazi na presjeku $p[A,I)$ i kružnice opisane oko ΔABC.

Označimo tu tačku sa M. Imamo $IM \cong PM$.

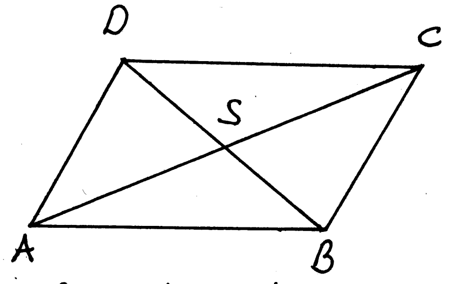
Posmatramo ΔAMP. Imamo $AM < AP + PM$ tj. $AI + MI < AP + PM$

$\Rightarrow AI < AP$ q.e.d.

(Jednakost vrijedi samo u slučaju kada $P \equiv I$).

Paralelogram

Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Potreban i dovoljan uslov da četverougao $\square ABCD$ bude paralelogram je:



a) $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D) \parallel p(B,C)$

b) $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $AB \cong CD$

c) dijagonale se polove
($AC \cap BD = \{S\}$, $AS \cong SC$, $BS \cong DS$)

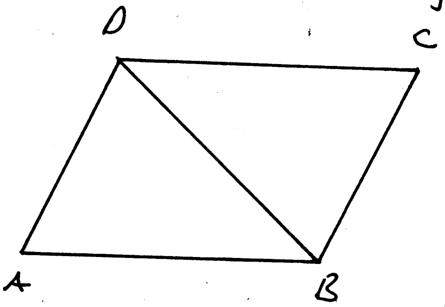
d) $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$

$P = a \cdot h = ab \sin\alpha$

Dijagonala u paralelogramu nije simetrala ugla.

1. Diskutovati da li je paralelogram tangentni ili tetivni četverougao.

Rj.



Dat je paralelogram $\square ABCD$

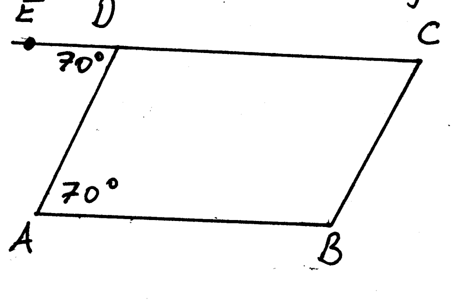
$$\left.\begin{array}{l} AB \cong CD \\ AD \cong CB \\ BD \cong BD \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ABD \cong \triangle BCD$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle BAD \cong \measuredangle DCB$$

Da bi paralelogram bio tetivni potrebno je i dovoljno da je $\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 180^\circ$ tj. $\measuredangle BAD \cong \measuredangle DCB = 90^\circ$.

Paralelogram će biti tetivni akko je $AB \cong AD$.

2. U paralelogramu $\square ABCD$ ugao pod A jednak je 70°. Izračunati: a) ugao pod $\measuredangle ADC$ b) ugao pod $\measuredangle BCD$ c) ugao $\measuredangle CAB$

Rješ.



$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D)$ transferzala

a) $\Longrightarrow \measuredangle ADE = 70^\circ$ $(C-D-E)$

$\Longrightarrow \measuredangle ADC = 110^\circ$

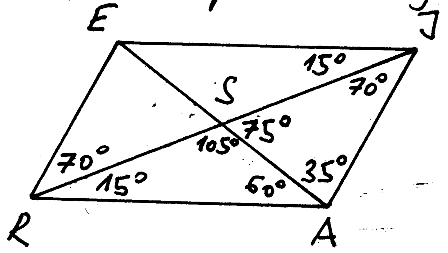
b) $\measuredangle BCD = \measuredangle DAB = 70^\circ$

c) $\measuredangle CAB$ se ne može izračunati

3. Dat je $\square ABCD$. Dokazati da $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $AB \cong CD$ ako i samo ako se dijagonale polove.

4. U četvorouglu □RAJE dijagonale se polove u tački S. Ako je $\sphericalangle EAJ = 35°$, $\sphericalangle ASJ = 75°$ i $\sphericalangle RJE = 15°$ odrediti ostale uglove četvorougla.

Rj. Kako se u □RAJE dijagonale polove to je dati četvorougao paralelogram.



$p(A,R) \parallel p(E,J)$ i $p(R,J)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle JRA = 15°$

$35° + 75° + \sphericalangle RJA = 180° \Rightarrow \sphericalangle RJA = 70°$.

$\sphericalangle EJA \cong \sphericalangle ERA \Rightarrow \sphericalangle JRE = 70°$

$\sphericalangle RSA + \sphericalangle JSA = 180°$ tj. $\sphericalangle RSA = 105°$

U $\triangle RSA$ su poznata dva ugla $\Rightarrow \sphericalangle RAS = 60°$.

Prema tome: $\sphericalangle R = 85°$, $\sphericalangle A = 95°$, $\sphericalangle J = 85°$ i $\sphericalangle E = 95°$

5. Za četvorougao □ABCD važi $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$. Visina spuštena iz vrha D je 4 cm, a $\sphericalangle BAD = 53°$. Odrediti ostale uglove četvorougla.

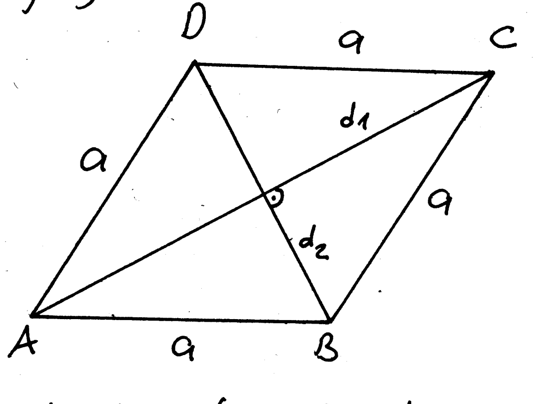
Romb

Romb je paralelogram kod koga su sve stranice podudarne. Potreban i dovoljan uslov da četvorougao □ABCD bude romb je

a) da ima dva para paralelnih i podudarnih stranica

b) da ima sve četiri podudarne stranice

c) dijagonale se polove pod pravim uglom.



$$P = a \cdot h = a\, a \sin\alpha = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

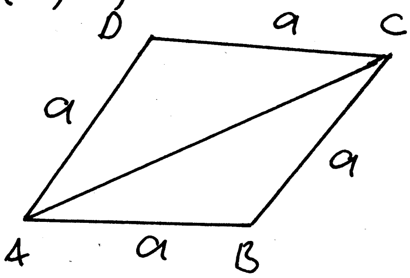
1. Diskutovati da li je romb tangentni ili tetivni četvorougao.

Rj. Romb jest tetivni četvorougao $(AB + CD = BC + AD)$

Romb je tangentni četverougao akko $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$
tj. $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90^\circ$

2. Neka je četverougao $\square ABCD$ romb. Dokazati da je $p(A,C)$ simetrala ugla kod A.

Rj.

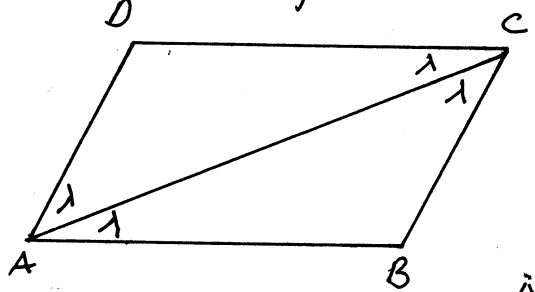


$$\left.\begin{array}{l} AD \cong BC \\ CD \cong AB \\ AC \cong AC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle CAB$$

tj. $p(A,C)$ simetrala ugla kod A.

3. Ako je u paralelogramu $\square ABCD$ dijagonala AC simetrala ugla kod A tada je taj četverougao romb.

Rj.

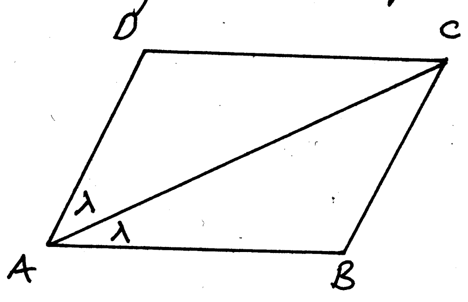


Kako je $p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \lambda$ to je $\sphericalangle ACD = \lambda$.
$p(A,D) \parallel p(B,C)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle ACB = \lambda$
$\triangle ABC$ je jkk sa osnovicom AC $\Rightarrow AB \cong BC$ tj. $\square ABCD$ jest romb

4. Četverougao $\square ABCD$ ima sve četri podudarne stranice ako i samo ako se dijagonale polove pod pravim uglom. Dokazati.

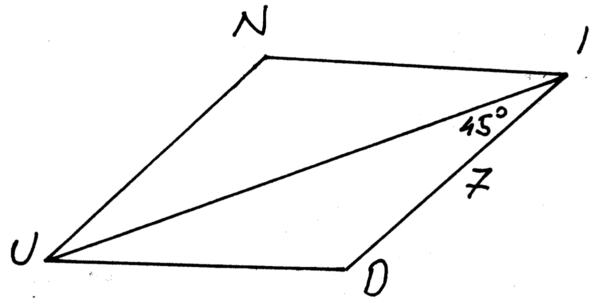
5. U paralelogramu $\square ABCD$ su uglovi $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle DAC$ podudarni.
a) ako je $AB = 2$ da li možemo izračunati stranicu BC
b) da li je ovom paralelogramu moguće upisati kružnicu.

Rj.



$\square ABCD$ paralelogram i $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle CAD = \lambda$
$\Rightarrow$ $\square ABCD$ je romb
a) $BC = 2$
b) romb je tangenti četverougao
$\Rightarrow$ može se upisati kružnica.

6. Četverougao $\square UDIN$ je romb, $\sphericalangle DIU = 45^\circ$ i $DI = 7$. Može li se izračunati obim četverougla. Ako može izračunati ga.



$\square UDIN$ romb $\Rightarrow$

$UD = DI = IN = NU = 7$

$O_{romba} = 28$

(7.) Četverougao $\square VAFI$ ima dva para jednakih i paralelnih stranica. Ako su veličine dijagonala 12 i 10 može li se izračunati obim četverougla. Ako može, izračunati ga.

Računanje površine trougla

Formule za površinu trougla

1. $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

2. $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

3. $P = r \cdot s$, r poluprečnik upisane kružnice

4. $P = \frac{abc}{4R}$, R poluprečnik opisane kružnice

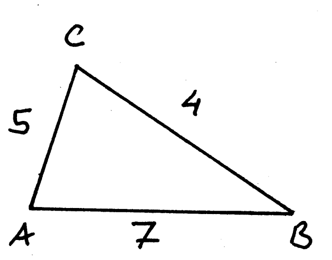
5. $P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$

(1.) Dat je $\triangle ABC$. Ako su mu stranice redom dužine 4, 5 i 7 cm odrediti:

a) poluprečnik upisane kružnice

b) poluprečnik opisane kružnice

Rj.



$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+7}{2} = 8$

$P = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$

$P = r \cdot s$

$4\sqrt{6} = r \cdot 8$

$r = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ polupr. u/i. kružnice

$P = \frac{abc}{4R}$

$4\sqrt{6} = \frac{20 \cdot 7}{4 \cdot R} = \frac{5 \cdot 7}{R}$

$R 4\sqrt{6} = 35$

$R = \frac{35}{4\sqrt{6}}$ poluprečnik opisane kružnica

(2.) U trouglu su stranice a, b, c jednake
a) 2, 3 i 5
b) 3, 4 i 5 Izračunati poluprečnike upisane kružnice

R: a) trougao ne postoji $(2+3=5)$

b) $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{12}{2}=6$

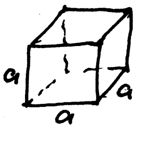
$P=\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\sqrt{36}=6$

$P=r\cdot s \Rightarrow 6=6\cdot r \Rightarrow r=1$ poluprečnik upisane kružnice

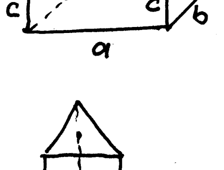
(3.) Nacrtati $\triangle ABC$ tako da se centar opisane kružnice $k(S,R)$ nalazi u vanjskoj oblasti trougla. Ako su $a=7$, $b=9$, $c=11$, $R=10$, $\sphericalangle ABC=26°$ i $\sphericalangle ACB=88°$ naći površinu i $\sphericalangle BAC$ trougla.

Površina i zapremina prizme

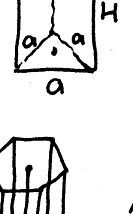
Površina proizvoljne prizme se računa po formuli: $P=2B+M$ gdje je M - omotač, u stvari zbir površina bočnih strana, a B površina osnove.
Za pojedine vrste prizmi važe sljedeće formule (a i b su osnovne ivice, H je visina, a kod kvadra često označena sa c):



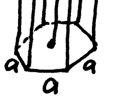
površina kocke $P=6a^2$



površina kvadra $P=2(ab+ac+bc)$



površina pravilne trostrane prizme $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3aH$



površina pravilne šestostrane prizme $P=3a^2\sqrt{3}+6aH$

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika

Elementarni zadaci sa ispita iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1
Paralelogram $\square HIDR$ preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(D,R)$ a zatim novodobijeni četverougao $\square H'I'D'R'$ rotirati oko tačke D' za ugao od $60°$ u negativnom smjeru.

Zadatak br. 2
Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Zadatak br. 3
Konstruisati pravougli trougao $\triangle ABC$ ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuz)i c.

Zadatak br. 4
Dat je jednakokraki - pravougli trougao $\triangle ABC$ s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao $\triangle BCD$ (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

Zadatak br. 5
Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Izračunati njegovu površinu ako je
$AB + AD = 8\,cm$, $BC = CD$ i $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 90°$.

Zadatak br. 6
Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α, onda se dobije ugao suplementan uglu α. Koliki je ugao β koji je komplementan sa suplementom ugla α?

Zadatak br. 7
Na pravoj $p(A,B)$ trougla $\triangle ABC$ data je tačka M takva da je $A - B - M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M,C)$ paralelna simetrali ugla.

Zadatak br. 8
Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice $1\,dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Zadatak br. 9
Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64\,cm$, a visina na osovici $h_a = 24\,cm$ rotirati oko vrha B za ugao od $90°$ u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Zadatak br. 10
Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

Zadatak br. 11
Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od $20°$. (Ugao od $20°$ konstruisati približno tačno.)

Zadatak br. 12
Jednakokraki trapez $\square ABCD$ sa osnovicom $AB = 7\,cm$ rotirati oko tačke C za ugao od $120°$ u pozitivnom smjeru.

Zadatak br. 13

U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

Zadatak br. 14

Dijagonale u četverouglu $\square JAST$ se polove. Ako je $\measuredangle JAS = 40°$ izračunati ostale uglove u četverouglu. Izračunati i ugao $\measuredangle SJA$.

Zadatak br. 15

U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5\,cm$, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Zadatak br. 16

U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30°$. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$.

Zadatak br. 17

Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao $\triangle BCP$ jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$.

Zadatak br. 18

U četverougao $\square ABCD$ je $AB < BC < CD < AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za $2\,cm$ (izuzev AB i AD). Naći površinu četverougla, ako mu je obim $36\,cm$ i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Zadatak br. 19

Težišnica i visina iz vrha A u $\triangle ABC$ djele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla $\triangle ABC$.

Zadatak br. 20

Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8\,cm$, $BC = 6\,cm$, $CD = 5\,cm$ i $AD = 7\,cm$. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

Zadatak br. 21

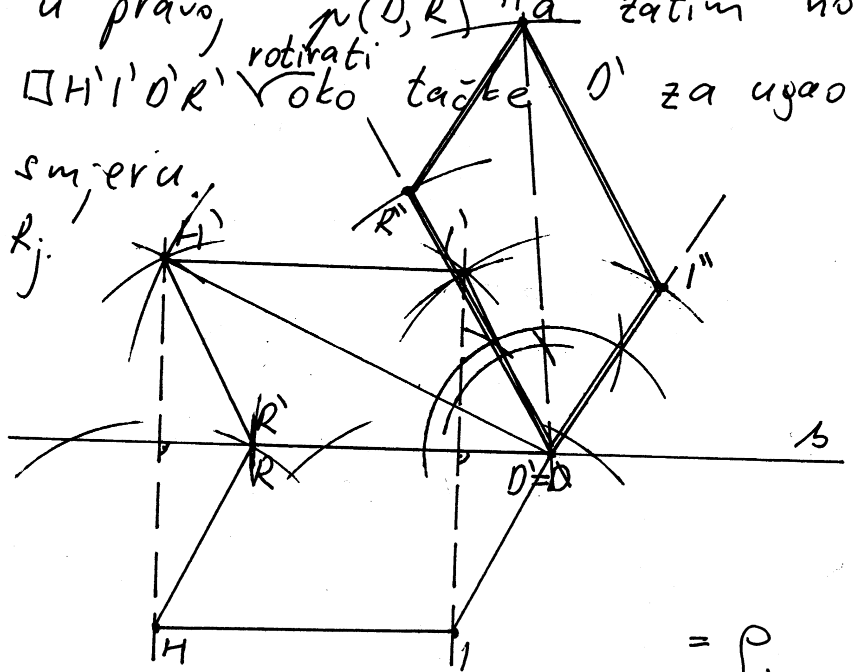
Zadani su ugao $\measuredangle ACB$, polupravа CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

Zadatak br. 22

Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Paralelogram $\square HIDR$ preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(D,R)$ a zatim novodobijeni četverougao $\square H'I'D'R'$ rotirati oko tačke D' za ugao od $60°$ u negativnom smjeru.

Rj.



Označimo sa $s = p(D,R)$

$$\left(\rho_{D',60°,-} \circ \sigma_s\right)(\square HIDR) =$$

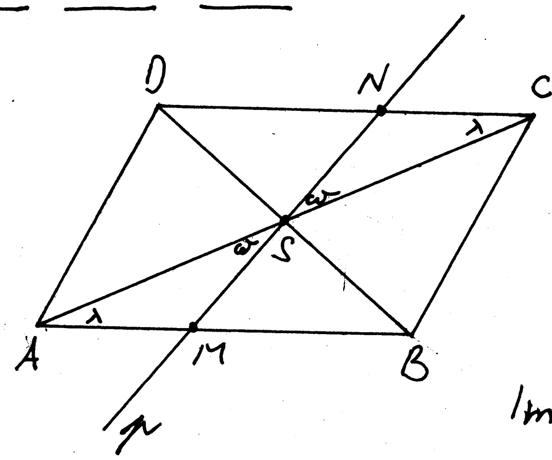
$$= \rho_{D',60°,-}\left(\sigma_s(\square HIDR)\right) =$$

$$= \rho_{D',60°,-}(\square H'I'D'R') = \square H''I''D''R''$$

Svaka prava koja sadrži presjek dijagonala paralelograma i siječe jednu stranicu, siječe i suprotnu stranicu. Njen odsječak je raspolovljen presječnom tačkom dijagonala. Dokazati.

Rj. postavka zadatka:

$\left.\begin{array}{l} \square ABCD \text{ paralelogram} \\ AC \cap AB = \{S\}, \text{ prava } p \ni S \\ p \cap AB = \{M\},\ p \cap CD = \{N\} \end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ sredina } MN$



$\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ $\Rightarrow AS \cong SC$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$; $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda$

Imamo:

$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAS \cong \measuredangle SCN = \lambda \\ AS \cong CS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle CSN = \omega \end{array}\right\} \xRightarrow{USU} \triangle ASM \cong \triangle CSN$

$\Downarrow$

$MS \cong NS$

$\Downarrow$

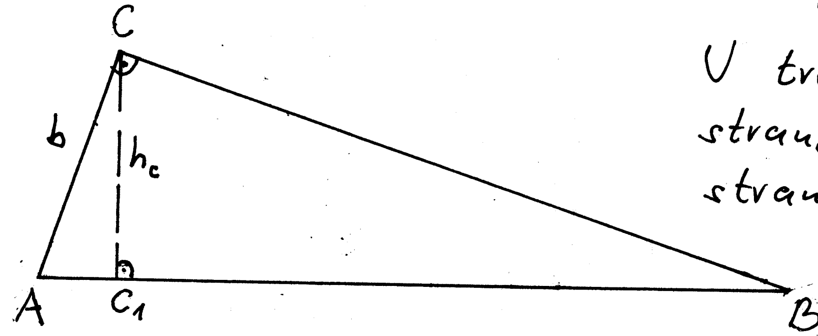
S sredina MN

q.e.d.

(#) Konstruisati pravougli trougao ΔABC ako su poznati kateta b i visina h_c koja odgovara hipotenuzi c.

Rj: **Analiza**

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data kateta b, visina h_c i neka je ΔABC traženi pravougli trougao.

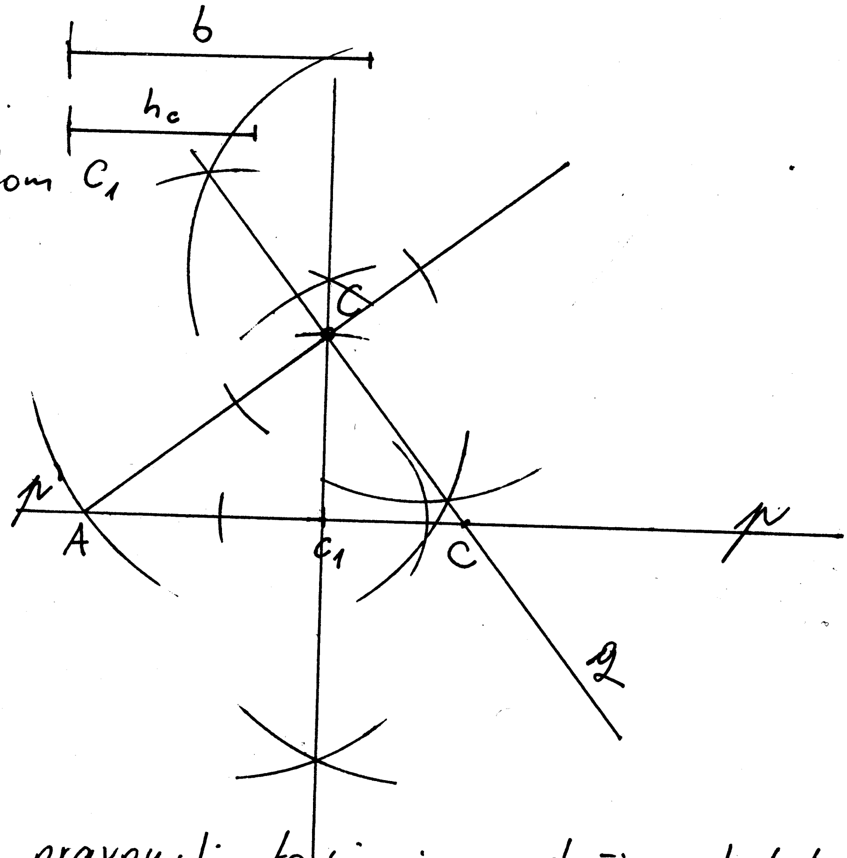


$CC_1 = h_c$

U trouglu ΔAC_1C imamo dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati. Kako je poznato da je ugao $\sphericalangle ACB = 90°$ to ćemo tačku B dobiti na presjeku $p(A, C_1)$ i prave koja sadrži C i okomita je na $p(A, C)$. Pa ΔABC možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. b, h_c
2. polupravu p' sa početnom tačkom C_1
3. n, $n \ni C_1$ i $n \perp p'$
4. $k(C_1, h_c) \cap n = \{C\}$
5. $k(C, b) \cap p' = \{A\}$
6. pravu p, $p \supseteq p'$
7. pravu q, $q \ni C$ i $q \perp p(A, C)$
8. $p \cap q = \{C\}$
9. ΔABC



Dokaz

Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu katete b i visinu h_c slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

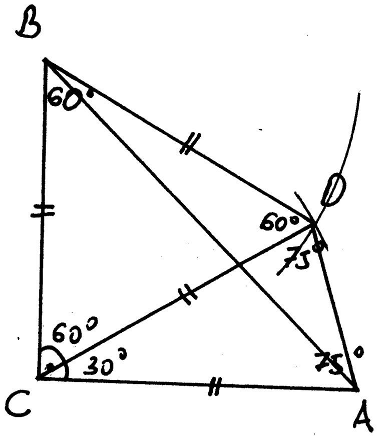
Za slučaj kad je $b \leq h_c$ zadatak nema rješenja

Za slučaj kad je $b > h_c$ zadatak ima jedinstveno rješenje.

(#) Dat je jednakokraki - pravougli trougao ΔABC s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao ΔBCD (razlikovati dva slučaja, kad je tačka D sa one strane prave $p(A,B)$ sa koje nije tačka C i kad je tačka D sa one strane prave $p(B,C)$ sa koje nije tačka A). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

Rj.

a)



ΔBCD jks $\Rightarrow \measuredangle DBC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 60°$

ΔABC pravougli $\Rightarrow \measuredangle ACD = 30°$

ΔACD jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 75°$

$\measuredangle ADB = 135°$

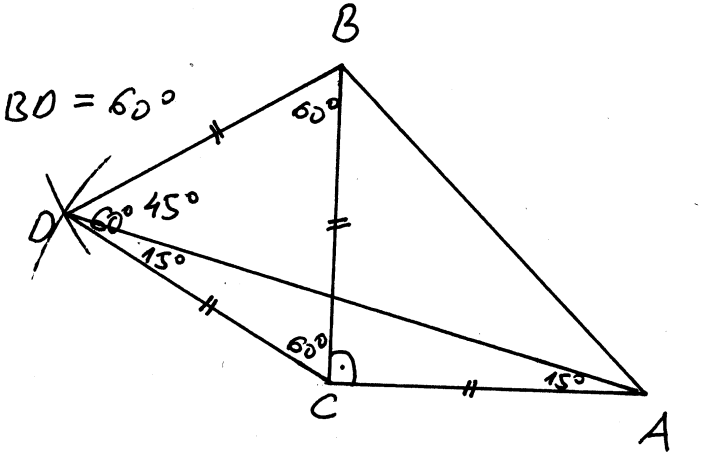
b) ΔBCD jkk $\Rightarrow \measuredangle BCD = \measuredangle BDC = \measuredangle CBD = 60°$

$\measuredangle ACD = 150°$

ΔACD jkk sa osnovicom AD

$\Rightarrow \measuredangle CAD = \measuredangle ADC = 15°$

$\measuredangle ADB = 45°$



(#) Dužine stranica trougla su tri uzastopna neparna broja, pri čemu je zbir dužina dviju dužih stranica za 7 cm manji od trostruke dužine najmanje stranice. Koliki je obim tog trougla? Odgovor obrazložiti

Rj. $n, n+2, n+4$ – tri uzastopna neparna broja, n neparan broj – stranice trougla

$(n+2)+(n+4)+7=3n$

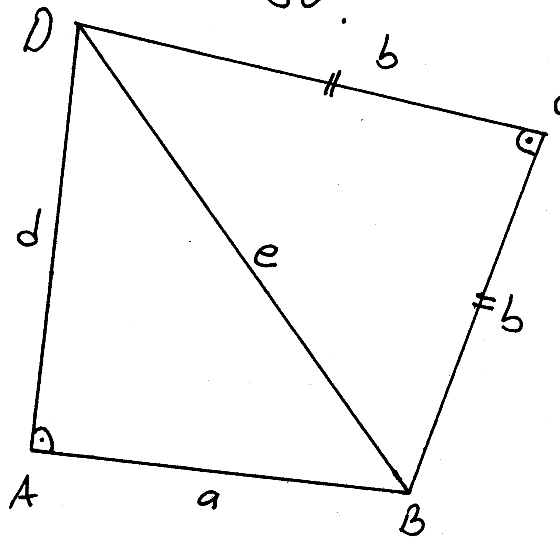
$2n+13=3n$

$n=13$

Stranice trougla su dužina 13, 15 i 17 cm a obim trougla je 45 cm.

(#) Dat je konveksan četverougao $\square ABCD$. Izračunati njegovu površinu ako je $AB+AD=8$ cm, $BC=CD$, $\measuredangle BAD=\measuredangle BCD=90°$.

Rj.



Uvedimo oznake

$AB=a,\ AD=d,\ BC=CD=b$

Znamo da je $a+d=8$.

Neka je $BD=e$

$e^2=a^2+d^2$ ($\triangle ABD$ je pravougli)

$(a+d)^2=8^2$

$a^2+2ad+d^2=64$

$a^2+d^2=64-2ad=e^2 \quad \ldots(*)$

$e^2=b^2+b^2=2b^2 \quad \ldots(**)$ ($\triangle BCD$ pravougli)

Iz $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $2b^2=64-2ad \quad /:2$

$b^2=32-ad$

$$\left.\begin{array}{l} P_{\triangle ABD}=\dfrac{a\cdot d}{2} \\ P_{\triangle BCD}=\dfrac{b\cdot b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{\square ABCD}=P_{\triangle ABD}+P_{\triangle BCD}=\frac{ad}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{ad+32-ad}{2}=\frac{32}{2}$$

$P_{\square ABCD}=16\ cm^2$

(#) Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α, onda se dobije ugao suplementan uglu α. Koliki je ugao β koji je komplementan sa suplementom ugla α?

Rj. $\gamma + \alpha = 180°$, α i γ su suplementni ugao

$\beta + \gamma = 90°$, β i γ su komplementni uglovi

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} = \frac{4\alpha + 2\alpha + \alpha}{8} = \frac{7\alpha}{8}$$

$$\frac{7\alpha}{8} + \frac{8\alpha}{8} = 180° \quad /\cdot 8$$

$15\alpha = 1440° \quad /:3$

$5\alpha = 480° \quad /:5$

$\alpha = 96°$

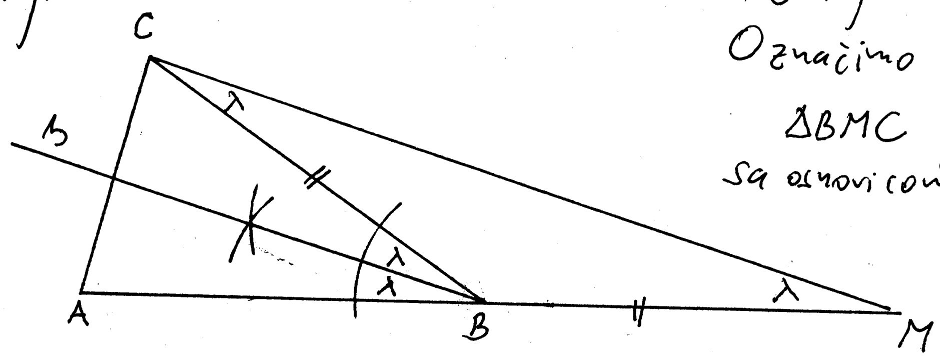
$\Rightarrow \gamma = 84°$

$\Downarrow$

$\beta = 6°$

(#) Na pravoj $p(A,B)$ trougla ΔABC data je tačka M takva da je $A-B-M$ i $BM \cong BC$. Dokazati da je prava $p(M,C)$ paralelna simetrali ugla.

Rj.



Neka je s simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

Označimo sa $\lambda = \measuredangle ABs \cong \measuredangle CBs$

$\left.\begin{array}{l}\Delta BMC \text{ jkk} \\ \text{sa osnovicom } MC\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle BMC = \measuredangle MCB$

Kako je $\measuredangle ABC = 2\lambda$ i

$\measuredangle ABC = \measuredangle BMC + \measuredangle MCB$

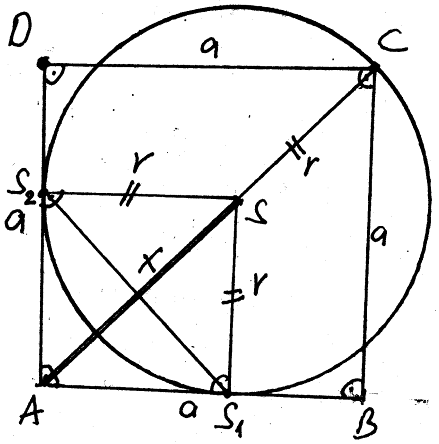
$\Rightarrow \measuredangle BCM \cong \measuredangle BMC = \lambda$

Sad na pravoj $p(A,B)$ imamo $\measuredangle ABs = \measuredangle AMC = \lambda \Rightarrow s \parallel p(M,C)$

q.e.d.

Zadan je kvadrat $\square ABCD$ dužine stranice 1 dm. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Rj.



Označimo sa r poluprečnik, a sa S centar kružnice koja dodiruje stranice AB u S_1 a stranicu AD u S_2.

Primjetimo da je četverougao $\square AS_1SS_2$ kvadrat (imamo sve četri ugla po 90° i $SS_1 \cong SS_2 = r$).

Označimo sa x stranicu AS.

U $\triangle ABC$ imamo $(x+r)^2 = a^2 + a^2$ tj:

$$(x+r)^2 = 2 \Rightarrow x + r = \sqrt{2} \quad \dots (1)$$

U $\triangle AS_1S$ imamo $x^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2 \Rightarrow x = r\sqrt{2}$

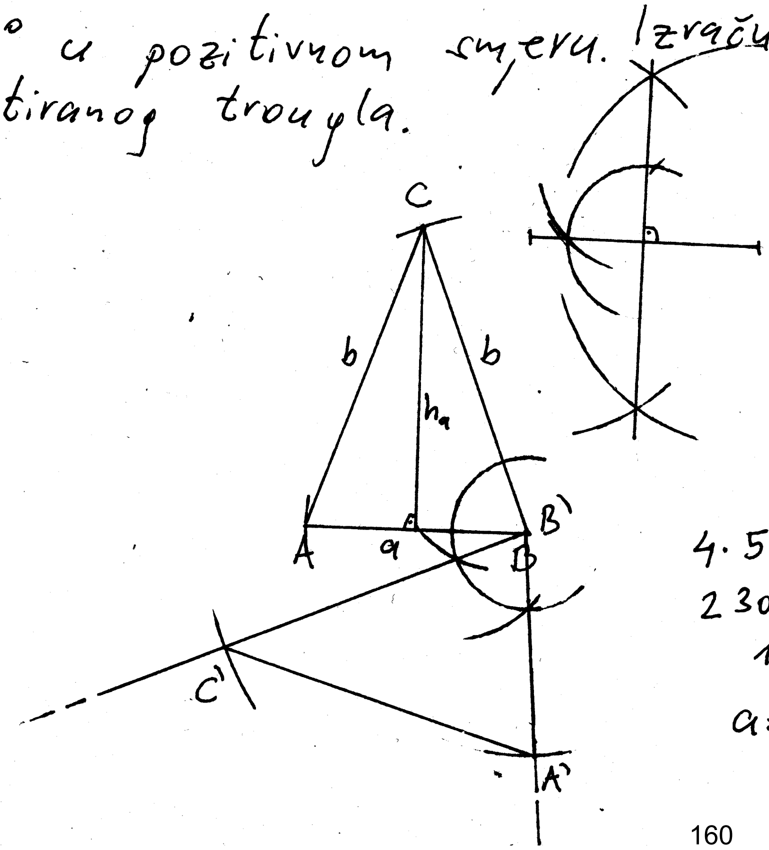
$$(1) \Rightarrow \quad r\sqrt{2} + r = \sqrt{2}$$

$$r(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1}$$

tj. $r = 2 - \sqrt{2}$ q.e.d.

Jednakokraki trougao $\triangle ABC$ čiji je obim $O = 64$ cm, a visina na osnovici $h_a = 24$ cm rotirati oko vrha B za ugao od 90° u pozitivnom smjeru. Izračunati površinu novonastalog rotiranog trougla.

Rj.



Rotacija čuva dužine pa su novonastali trougao $\triangle A'B'C'$ i $\triangle ABC$ podudarni.

$O = 2b + a = 64 \Rightarrow 2b = 64 - a$

$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad 4b^2 = (64-a)^2$

$24^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} \quad / \cdot 4 \qquad = 4096 - 128a + a^2$

$4 \cdot 576 = 4b^2 - a^2$

$2304 = 4096 - 128a$

$128a = 1792$

$a = 14$ cm

$P = \frac{a \cdot h_a}{2}$

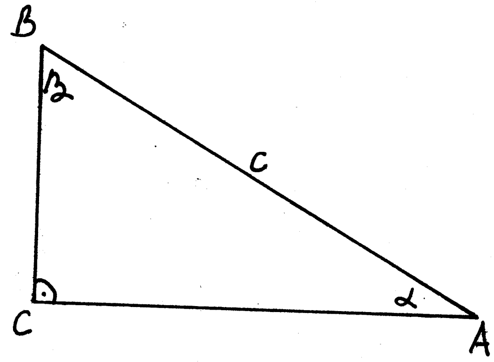
$P = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24$

$P = 168 \text{ cm}^2$

(#) Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

Rj: Analiza

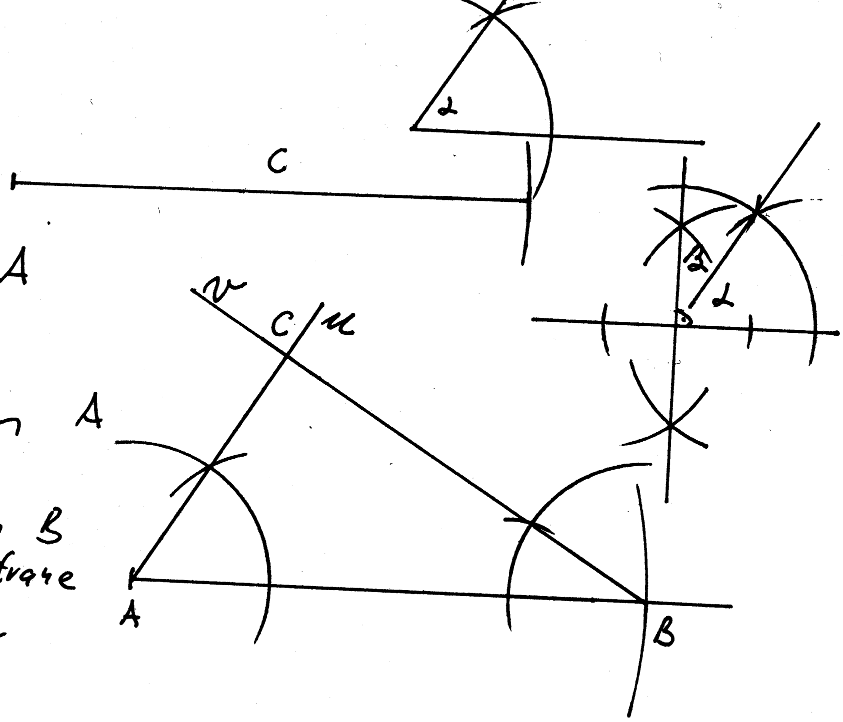
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC pravougli trougao koji ima dat ugao α i dužinu hipotenuze c. U trouglu su poznata dva ugla ($90°$ i α) pa možemo izračunati ugao β po formuli $\beta = 90° - \alpha$. ($\alpha + \beta + 90° = 180°$)



Kako imamo hipotenuzu c i dva nalegla ugla na njoj, pomoću pravila USU nije teško konstruisati traženi trougao

Konstrukcija

1. α, c ($\alpha < 90°$)
2. $\beta = 90° - \alpha$
3. pp p sa početnom tačkom A
4. $k(A, c) \cap p = \{B\}$
5. pp u sa početnom tačkom A takvu da je $\sphericalangle BAu = \alpha$
6. pp v sa početnom tačkom B koja se nalazi sa iste strane $p(A,B)$ sa koje je i pp u takva da je $\sphericalangle AB\vec{v} = \beta$
7. $u \cap v = \{C\}$
8. ΔABC



Dokaz

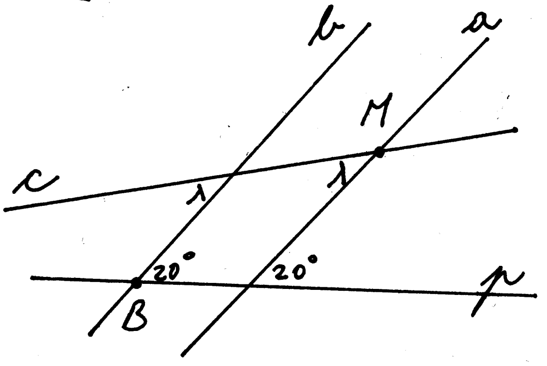
Da je konstruisani trougao pravougli koji ima dužinu hipotenuze c jednaku dužini date duži slijedi iz Analize i Konstrukcije.

Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje

(#) Kroz datu tačku M van date prave p konstruisati pravu koja siječe datu pravu pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisati približno tačno).

Analiza

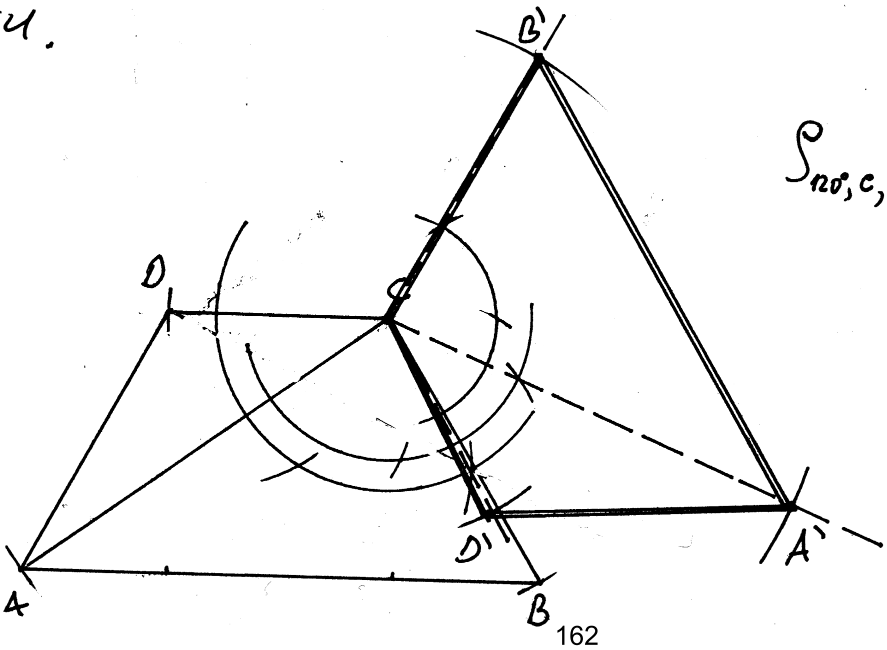


Pretpostavimo da je zadatak rješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku M i siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je B proizvoljna tačka na pravoj p. Kroz tačku B nije teško konstruisati pravu b koja siječe pravu p pod uglom od 20°. Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku M i siječe pravu b.
Primjetimo da su prave a i b paralelne i da je c transferzala pa imamo dva ugla λ na pravoj c.
Prema tome, B je proizvoljna tačka pa pravu b možemo konstruisati, c je proizvoljna prava kroz tačku M pa i traženu pravu a možemo konstruisati.

(#) Jednakokraki trapez □ABCD sa osnovicom AB = 7 cm rotirati oko tačke C za ugao od 120° u pozitivnom smjeru.

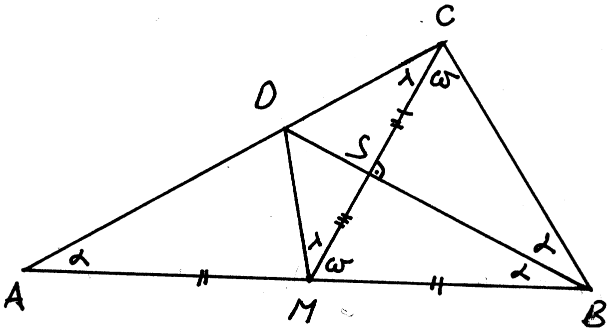
Rj.

$\rho_{120^\circ, C, +}(\square ABCD) = \square A'B'CD'$



(#) U trouglu $\triangle ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\triangle ABC$.

Rj.



CM težišna duž
BD simetrala BD simetrala i
Kako je $\measuredangle ABC = \beta$, $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC = 2\alpha$
to je $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = \alpha$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\triangle ABD$ jkk sa osnovicom AB $\Rightarrow$ DM visina trougla $\triangle ABD$

Neka je $\{S\} = CM \cap BD$

$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MSB \cong \measuredangle CSB = 90^\circ \\ BS \cong BS \\ \measuredangle MBS \cong \measuredangle CBS = \alpha \end{array}\right\}$ USU $\Rightarrow$ $\triangle MBS \cong \triangle CBS$

$\Downarrow$

$MS \cong CS$ i $\measuredangle BMS \cong \measuredangle BCS = \omega$

Dalje imamo

$\left.\begin{array}{l} MS \cong CS \\ \measuredangle MSD \cong \measuredangle CSD = 90^\circ \\ DS \cong DS \end{array}\right\}$ SUS $\Rightarrow$ $\triangle MSD \cong \triangle CSD$

$\Downarrow$

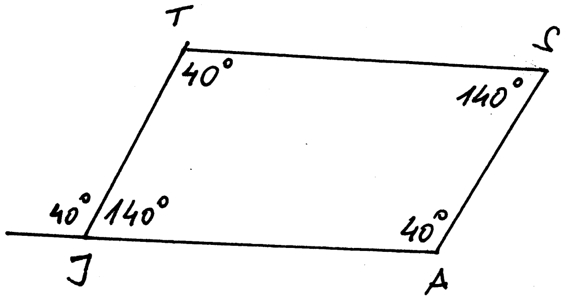
$\measuredangle DMS \cong \measuredangle DCS = \lambda$

$\gamma = \lambda + \omega$ i $\lambda + \omega = 90^\circ$ (DM je visina $\triangle ABD$) $\Rightarrow$ $\gamma = 90^\circ$

$3\alpha + \gamma = 180^\circ$ $\Rightarrow$ $3\alpha = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$

(#) Dijagonale u četverouglu $\square JAST$ se polove. Ako je $\measuredangle JAS = 40^\circ$ izračunati ostale uglove u četverouglu. Izračunati i ugao $\measuredangle SJA$.

Rj. dijagonale se polove $\Rightarrow$ $\square JAST$ je paralelogram

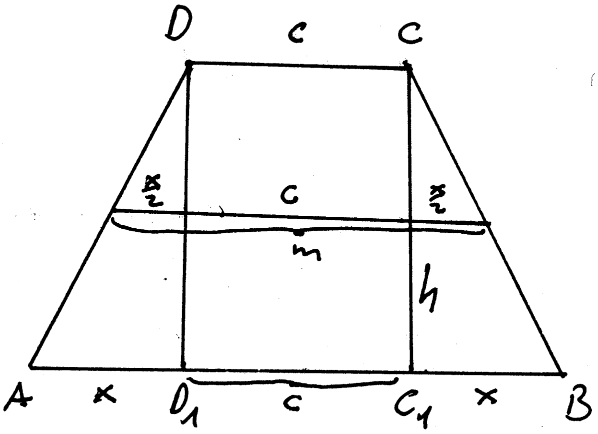


$\measuredangle AJT = 140^\circ$
$\measuredangle JTS = 40^\circ$
$\measuredangle TSA = 140^\circ$

$\measuredangle SJA$ se ne može izračunati (u paralelogramu dijagonala nije simetrala ugla).

(#) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

Rj. Koristim oznake sa slike.



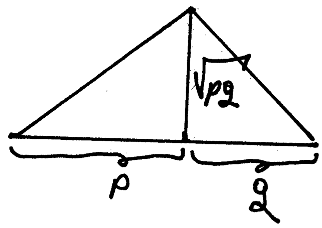
I način:

$$P = \frac{a+c}{2}\cdot h = m\cdot h$$

$m = 5$ cm

$AC = 10$ cm

Iskoristiću poznatu činjenicu da je



$\Rightarrow \quad h = \sqrt{(x+c)\cdot x}$

$m = 5 \Rightarrow x+c=5 \Rightarrow h = \sqrt{5x}$

$AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = (x+c)^2 + h^2 = 25 + 5x \Rightarrow$

$AC^2 = 10^2 = 100$

$\Downarrow$

$5x = 75$

$x = 15$

$h = \sqrt{75} = \sqrt{3\cdot 25} = 5\sqrt{3}$

$P = 25\sqrt{3}$ cm^2

II način:

$m = \frac{a+c}{2} = 5$ cm

$a+c = 10$ cm

$x = \frac{a-c}{2}$

$AC_1 = a - x = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5$

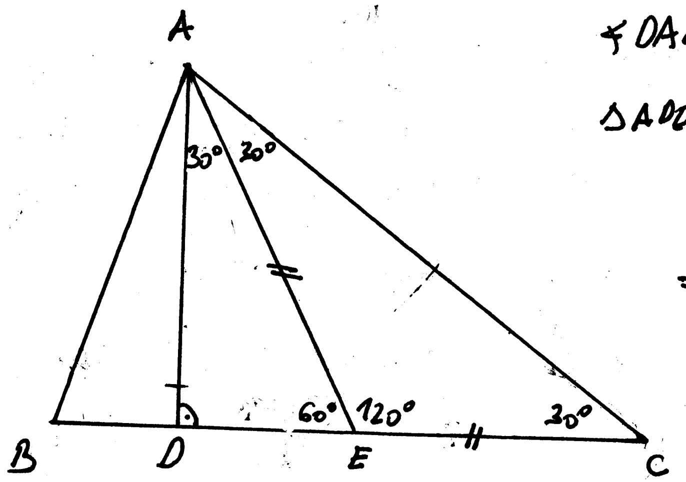
$h^2 = AC^2 - h^2 = 100 - 25 = 75$

$h = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$P = 5\cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ cm^2

(#) U trouglu $\triangle ABC$ je $AC = BC$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\angle DAC$ gradi ugao od $30°$. Naći uglove trougla $\triangle ABC$ i dokazati da je $AE = EC$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\alpha = 75°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 30°$

$\angle DAE \cong \angle CAE = 30°$

$\triangle ADE$ pravougli $\Rightarrow \angle AEC = 120°$

(vanjski ugao $\triangle ADE$)

$\Rightarrow \angle ACE = 30° \Rightarrow \triangle AEC$ jkk

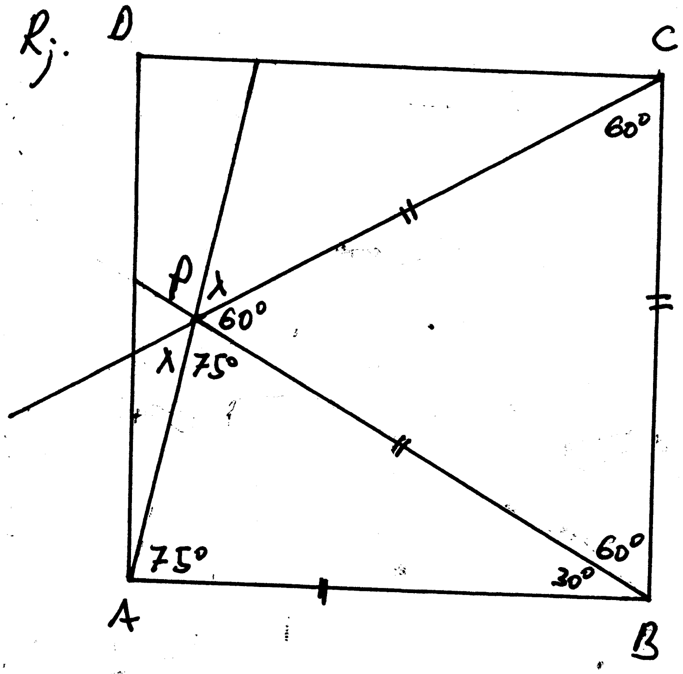
tj. $AE = EC$

$\triangle ABC$ jkk $\Rightarrow$

$\angle CAB \cong \angle CBA = 75°$

(#) Dat je kvadrat $\square ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao $\triangle BCP$ jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odrediti mjerni broj ugla $\angle CPE$. Odgovor obrazložiti!

Rj.



$\triangle BCP$ jkk $\Rightarrow$ ima uglove po $60°$

$\angle ABC = 90° \Rightarrow \angle ABP = 30°$

$AB \cong BP \cong BC \Rightarrow \triangle ABP$ jkk

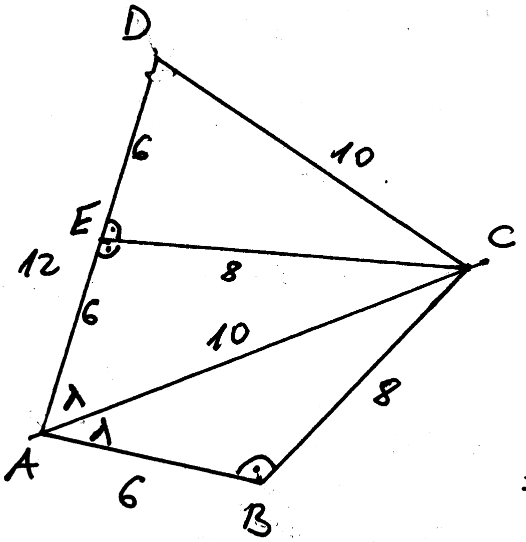
$\Rightarrow \angle BAP \cong \angle APB = 75°$

$\lambda + 60° + 75° = 180°$

$\lambda = 45°$

#) U četverouglu $\square ABCD$ je $AB<BC<CD<AD$ i svake dvije susjedne stranice se razlikuju za 2 cm (izuzev AB i AD). Nađi površinu četverougla, ako mu je obim 36 cm i ako dijagonala AC pripada simetrali ugla $\measuredangle BAD$.

Rj.



$AB<BC,\quad BC-AB=2 \Rightarrow BC=AB+2$

$BC<CD,\quad CD-BC=2 \Rightarrow CD=AB+4$

$CD<AD,\quad AD-CD=2 \Rightarrow AD=AB+6$

$O=36\text{ cm} \Rightarrow$

$AB+BC+CD+AD=36$ tj. $4AB+12=36$

$AB=6$

$\Rightarrow BC=8,\ CD=10$ i $AD=12$

Dijagonala AC leži na dijagonali. Uzmimo tačku $E\in AD$ takvu da je $AE=6$. Iz podudarnosti SUS $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AEC$

$\Downarrow$

$AB \cong AE = 6$ cm

ΔECD je pravougli

$10^2=6^2+8^2 \Rightarrow \measuredangle AEC \cong \measuredangle DEC = 90^\circ \Rightarrow AC^2=8^2+6^2=100$

$AC=10$

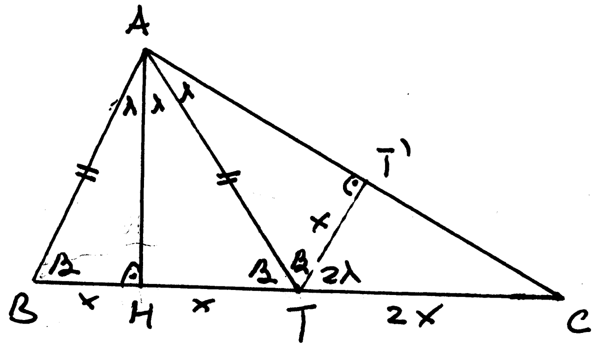
$$P_{\Delta ACD}=\frac{AD\cdot h_{AD}}{2}=\frac{12\cdot 8}{2}=48$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$$

$$P_{\square ABCD}=72\text{ cm}^2$$

Težišnica i visina iz vrha A u ΔABC dijele ugao α na tri jednaka dijela. Koliki su uglovi trougla ΔABC?

Rj.



Uvedimo oznake za vrhove i uglove kao na slici.
Primijetimo da je zbog podudarnosti USU $\Delta AHB \cong \Delta AHT$

$\Downarrow$

$BH \cong HT = x$

Neka je T' ortogonalna projekcija tačke T na AC.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle TT'A \cong \measuredangle ABH = 90^\circ \\ \measuredangle TAT' \cong \measuredangle BAH = \lambda \\ TA \cong BA \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \Delta TT'A \cong \Delta BHA$$

$\Downarrow$

$BH \cong TT' = x$ i $\measuredangle T'TA \cong \measuredangle HBA = \beta$

Kako je $2\beta + 2\lambda = 180^\circ \Rightarrow \measuredangle CTT' = 2\lambda$. $\Delta TT'C$ je pravougli pa

$$\cos 2\lambda = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda = 60^\circ \Rightarrow \lambda = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 30^\circ$$

Konstruisati četverougao $\square ABCD$ ako su date dužine njegovih stranica $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 5$ cm i $AD = 7$ cm. Da li se u ovaj četverougao može upisati krug?

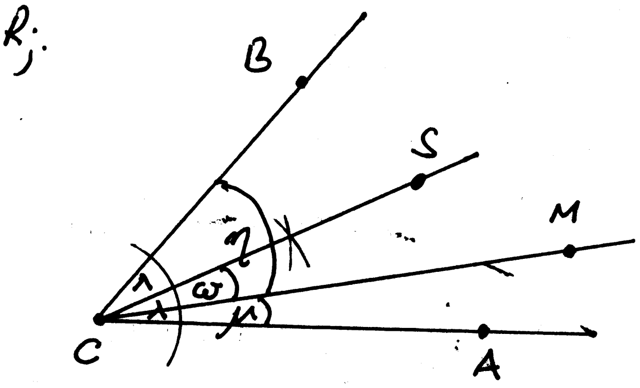
Rj. Kako ne znamo ni jedan ugao u četverouglu i znam samo stranice četverougla, četverougao ne možemo konstruisati.

U četverougao se može upisati krug

$$AB + CD = BC + AD \quad \text{(četverougao je tangentni)}$$

(#) Zadani su ugao $\sphericalangle ACB$, polupravа CM unutar ugla $\sphericalangle ACB$ i polupravа CS koja polovi $\sphericalangle ACB$. Dokazati da je $\sphericalangle SCM = \frac{1}{2}(\sphericalangle MCA - \sphericalangle MCB)$.

Rj.



Uvedimo oznake:

$\lambda = \sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB$

$\omega = \sphericalangle SCM$

$\mu = \sphericalangle MCA$ i $\eta = \sphericalangle MCB$.

Trebamo pokazati da je

$\omega = \frac{1}{2}(\mu - \eta)$

$\omega = \lambda - \mu$

$\omega = \eta - \lambda$

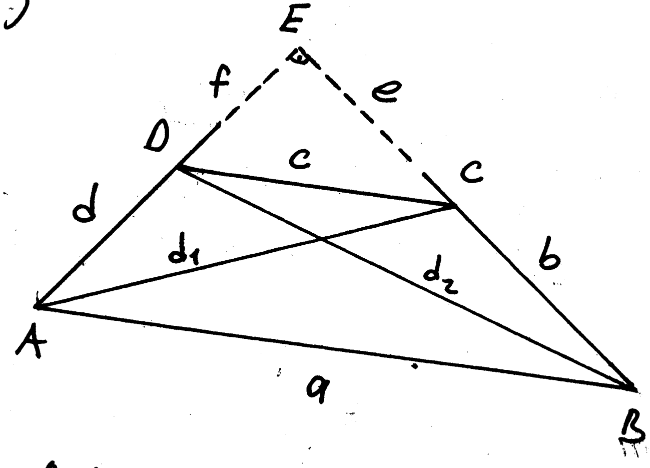
tj.

$$\begin{aligned} \sphericalangle SCM &= \sphericalangle ACS - \sphericalangle MCA \\ \sphericalangle SCM &= \sphericalangle MCB - \sphericalangle SCB \quad + \quad (\sphericalangle ACS \cong \sphericalangle SCB) \\ \hline 2\sphericalangle SCM &= \sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA \\ \sphericalangle SCM &= \frac{1}{2}(\sphericalangle MCB - \sphericalangle MCA) \end{aligned}$$

q.e.d.

(#) Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\triangle ACE$ je pravougli sa hipotenuzom AC

$d_1^2 = (d+f)^2 + e^2$ ... (1)

$\triangle BDE$ je pravougli sa hipotenuzom BD

$d_2^2 = (b+e)^2 + f^2$ ... (2)

$\triangle ABE$ je pravougli sa hipotenuzom $AB \Rightarrow a^2 = (d+f)^2 + (e+b)^2$

$\triangle DCE$ je pravougli sa hipotenuzom $CD \Rightarrow c^2 = e^2 + f^2$

$(1)+(2) \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = (d+f)^2 + e^2 + (b+e)^2 + f^2 = a^2 + c^2$

tj. $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + c^2$

q.e.d.

Podudarnost trouglova (elementarni zadaci)

- zadaci posuđeni iz knjige:
Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja
učenika osnovnih škola u BiH; Šefket Arslanagić-

1. U oštrouglom trouglu ΔABC ugao kod vrha C je 60^0. Ako su AA_1 i BB_1 visine i C' središte stranice AB, dokazati da je trougao $\Delta C'A_1B_1$ jednakostraničan.

2. U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

3. Zbir uglova na većoj osnovici trapeza je 90^0. Dokazati da je duž čiji su krajevi središta osnovica jednaka duži čiji su krajevi središta dijagonala trapeza.

4. U jednakokrakom trouglu ΔABC ugao $\angle BAC$ naspram osnovice BC iznosi 20^0. Na krakovima AB i AC uzete su redom tačke E i D tako da je $\measuredangle ACE = 60^0$ i $\measuredangle ABD = 30^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AED$.

5. Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine četiri od njih su $5,3,9$ i 2 kvadratne jedinice (vidi sliku). Odrediti najmanju moguću vrijednost površine pravougaonika. Pod kojim uslovima pravougaonik ima tu minimalnu površinu?

6. Četverougao $ABCD$ je kvadrat izvan kojeg se nalaze tačke E i F tako da su trouglovi ΔABE i ΔBCF jednakostranični. Neka je tačka M središte duži DE i $\{H\} = CE \cap DB$. Dokazati da je trougao ΔDEF jednakostranični.

7. U jednakokrakom trouglu ΔABC, $\overline{AC} = \overline{BC}$, osnovica AB ima dužinu $\sqrt{3}$ i visina CD ima dužinu $\sqrt{2}$. Neka su E i F sredine stranica CB i DB respektivno, a G tačka presjeka pravih AE i CF. Dokazati da se tačka D nalazi na simetrali ugla $\angle AGF$.

8. U jednakokrakom trouglu ΔABC ugao koga obrazuju simetrala ugla između krakova i simetrala ugla na osnovici je tri puta veći od ugla na osnovici. Šta je veće: osnovica ili krak tog trougla?

9. Simetrale uglova α i β jednakostraničnog trougla ΔABC sijeku se u tački S. Na stranici AB izabrana je tačka M i na stranici AC tačka N, tako da je $\overline{AM} + \overline{AN} = \overline{AB}$. Dokazati da je $\overline{SM} = \overline{SN}$ i izračunati veličinu ugla $\angle MSN$.

10. Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je uago $\angle BAC > 50^0$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je uago $\angle BAM = 50^0$, a na kraku AC tačka N takva da je $\overline{AM} = \overline{AN}$. Koliki je ugao $\angle CMN$?

11. Središte dužeg kraka pravouglog trapeza spojeno je dužima sa vrhovima trapeza koja pripadaju drugom kraku. Pri tome je trapez podijeljen na tri jednakokraka trougla. Odrediti veličinu oštrog ugla trapeza.

12. Izračunati $\measuredangle A$ trougla ΔABC čija je dužina težišnice $d(A,M)=\frac{1}{2}d(B,C)$.

13. Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

14. Nad stranicama BC i CD paralelograma $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi ΔBKC i ΔDLC. Dokazati da je trougao ΔAKL jednakostraničan.

15. Zadan je trougao ΔABC. Dokazati da su sredine stranica i podnožje bilo koje visine u zadanom trouglu vrhovi jednakokrakog trapeza.

16. U kvadratu $ABCD$ tačke M,N i P su središta stranica AB,BC i CD redom. Dokazati da važi:

a) $DN \perp CM$;

b) $\measuredangle DNP=\measuredangle CMN$.

17. U kvadrat $ABCD$ stranice dužine 1 upisan je trougao ΔPQR tako da $P\in AD, Q\in CD$ i $R\in BC$. Dokazati da je površina trougla $\Delta PQR\le\frac{1}{2}$. Kada vrijedi jednakost?

18. U oštrouglom trouglu ΔABC $\left(\overline{AC}<\overline{BC}\right)$ visina $h_c=CC'$ i simetrala $s=CM$ ugla γ zaklapaju ugao od 9^0, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od 61^0. Odrediti uglove trougla ΔABC.

19. U trouglu ΔABC su date stranice a i b. Ako je $h_c=h_a+h_b$, izračunati stranicu c.

20. U trouglu ΔABC je $\measuredangle ABC=2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na simetralu BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla ΔABC.

21. Neka su a,b i c dužine stranica trougla i t_c dužina težišnice povučene iz vrha (tjemena) C. Dokazati da vrijedi nejednakost

22. Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Središte M stranice AB spojeno je sa tjemenima C i D. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

23. Iz tjemena A pravougaonika $ABCD$ spuštena je normala na dijagonalu pravougaonika i produžena za istu dužinu do tačke F. Dokazati da je:

a) duž BF normalna na duž DF ;

b) četverougao $BDFC$ jednakokraki trapez.

24. Dat je jednakokrako-pravougli trougao ΔABC s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao ΔBCD (razlikovati dva slučaja). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

25. Dat je kvadrat $ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao ΔBCP jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odredite mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

26. Na produžetku stranice AB trougla ΔABC iza B u odnosu na A data je tačka M, tako da je $\overline{BM}=\overline{BC}$. Dokazati da je prava MC paralelna simetrali ugla ΔABC.

27. U trouglu ΔABC je $\overline{AC}=\overline{BC}$, a visina AD sa simetralom AE ($E\in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od 30^0. Naći uglove trougla ΔABC i dokazati da je $\overline{AE}=\overline{EC}$. Odgovor obrazložiti!

28. Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Središte M stranice AB spojeno je sa tjemenima C i D. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

29. Trougao ΔABC je jednakokraki kod koga je $\overline{AB}=\overline{AC}$. Neka su tačke $D\in BC$ i $E\in AC$ takve da je $\measuredangle EBC=\frac{1}{2}\measuredangle BAD$ i neka je tačka F presječna tačka pravih AD i BE, tj. $\{F\}=AD\cap BE$. Dokazati da je trougao ΔAFE jednakokraki.

30. Simetrale uglova $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle ACB$ trougla ΔABC se sijeku u tački I. Neka su tačke M i N simetrične tački I u odnosu na stranice BC i AB trougla. Koliko iznosi ugao $\measuredangle ABC$ ako je $BM\perp BN$?

31. Neka je četverougao $ABCD$ paralelogram. Tačka M je središte stranice BC, a tačka P je podnožje normale spuštene iz vrha D na pravu AM. Dokazati da je $\overline{CP}=\overline{AB}$.

32. Neka je CD visina na hipotenuzu pravouglog trougla ΔABC, tačka M središte duži CD i tačka N središte duži BD. Dokazati da je prava AM normalna (okomita) na pravu CN.

33. Zadan je kvadrat $ABCD$ dužine stranice $1dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

34. Površina trougla ΔABC iznosi $18cm^2$. Tačka D uzeta je na stranici AC, tako da je $\overline{DC}=2\overline{AD}$. Naći površine trouglova ΔABD i ΔDBC.

35. Težišnica i visina iz vrha A u trouglu ΔABC dijele ugao α na tri jednaka diela. Koliki su uglovi trougla ΔABC?

36. Dat je ugao od 54^0. Kako ćeš samo pomoću šestara i linijara podijeliti taj ugao na tri jednaka dijela? Opiši postupak. (Prenesi ugao od 54^0 sa date slike, ili ga nacrtaj pomoću uglomjera).

37. Dat je kvadrat $ABCD$ stranice a. Nad dvjema njegovim susjednim stranicama konstruišu se dva jednakostranična trougla u unutrašnjosti kvadrata. Izračunaj površinu zajedničkog dijela tih trouglova.

38. Nacrtaj trougao $\Delta ABC, (\beta>\alpha)$ i visinu h_c na stranicu c. Tačku u kojoj visina siječe stranicu c označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu AB označi da D. Ako je $\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{CE}$, odrediti koliko je $\beta-\alpha$.

39. Na stranici AB datog pravougaonika $ABCD$ istaknute su tačke E i F, tako da je $\overline{AE}=\overline{BF}=2, \overline{EF}=6, \overline{FC}=2\sqrt{5}$, $\measuredangle BFC=27^0$. Odrediti uglove $\measuredangle ECF$ i $\measuredangle CEF$.

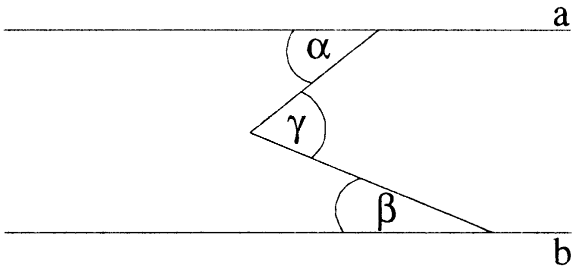
40. Dokazati da su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c', h_c=h_{c'}, t_c=t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$.

41. Zadani su ugao $\measuredangle ACB$ (C je njegov vrh, a tačke A i B su na njegovim kracima), poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i polupravа CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

42. Magični kvadrat reda 3×3 je takav kvadrat kod kojeg se sabiranjem po tri broja u svim pravcima (horizontalno, vertikalno i na obje dijagonale) dobija uvijek isti broj. Popuniti prazna polja u kvadratu, pa da on bude magičan kvadrat.

	21	14
		19
20		

43. Dati su uglovi $\alpha = 42^0 54'$ i $\beta = 35^0 37'$. Izračunati ugao γ ako su prave a i b paralelne (vidi sliku).



44. Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2cm, h_b = 4cm, h_c = 6cm$?

45. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ΔABC date su tačke M i N tako da je $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

46. Dužine stranica trougla ΔABC su $a = 13cm, b = 14cm, c = 15cm$. Kolike su dužine njegovih visina?

47. Dokazati da za pravougli trougao vrijedi nejednakost $R \geq \sqrt{P}$, gdje je R poluprečnik opisanog kruga tog trougla, a P njegova površina.

48. U trouglu ΔABC je ugao $\beta = 75^0$ i ugao $\gamma = 80^0$. Uzete su tačke $E \in AC$ i $F \in AB$ tako da je ugao $\measuredangle FBE = 25^0$ i ugao $\measuredangle FCB = 40^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AEF$.

49. Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A,B,C datog trougla. Dati dokaz konstrukcije. Koliko takvih pravih postoji?

50. Dat je trougao ΔABC u kome je ugao $\measuredangle BAC = 120^0$. Na simetrali ugla $\measuredangle BAC$ data je tačka D tako da je $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Dokazati da je trougao ΔBCD jednakostranični.

51. Kvadrat je podijeljen na devet jednakih manjih kvadrata. Je li moguće u ove male kvadrate upisati brojeve $1,2$ i 3 tako da u svim kolonama, vrstama i dijagonalama sume brojeva budu različite? Odgovor obrazložiti!

52. Dat je jednakokraki trougao ΔABC ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM = \measuredangle CBN$ i $\overline{MN} = \overline{MB}$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

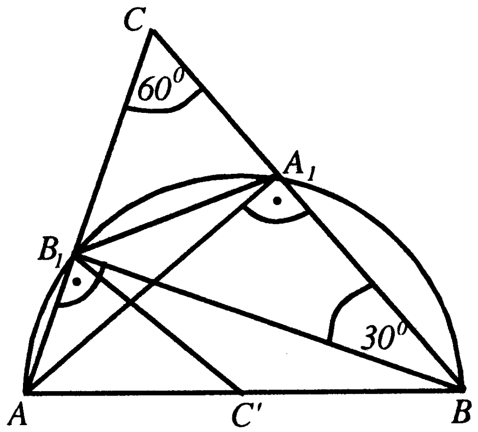
53. Dijagonala AC romba $ABCD$ ima dužinu $6cm$. Neka je M središte stranice CD i N središte stranice AD. Duži BN i BM sijeku dijagonalu AC u tačkama P i Q.

a) Izračunati dužinu odsječka PQ;

b) Izračunati površinu trougla ΔBMN ako je $\overline{BM} = 3cm$.

#) U oštrouglom trouglu ΔABC ugao kod vrha C je 60^0. Ako su AA_1 i BB_1 visine i C' središte stranice AB, dokazati da je trougao $\Delta C'A_1B_1$ jednakostraničan.

R.) Četverougao ABA_1B_1 je tetivan jer nad stranicom AB leže dva prava ugla sa vrhovima u tačkama A_1 i B_1, pa je AB prečnik. Tada je središte stranice AB tačka C' centar te kružnice, pa je $\overline{C'A_1} = \overline{C'B_1}$ i trougao $\Delta C'A_1B_1$ je jednakokraki.



Imamo da je $\measuredangle A_1BB_1 = \measuredangle CBB_1 = 30^0 = \frac{1}{2}\measuredangle A_1C'B_1$ (uglovi u pravouglom trouglu i centralni i periferijski ugao), pa je $\measuredangle A_1C'B_1 = 60^0$. Tada je trougao $\Delta C'A_1B_1$ jednakostraničan.

#) U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu 5 cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

R.) Neka je a dužina veće osnovice, a c dužina manje osnovice trapeza. Tada je dužina srednje linije trapeza $m = \frac{a+c}{2} = 5\,cm$ Odavde je $a + c = 10\,cm$. Neka je CE visina trapeza. Označimo sa x dužinu duži EB. Tada je $x = \frac{a-c}{2}$. Zbog toga je $\overline{AE} = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5\,cm$. Tada je $h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 = 100 - 25 = 75.$ Dakle, $h = 5\sqrt{3}\,cm.$ Površina trapeza je $P = 25\sqrt{3}\,cm^2$.

#

Zbir uglova na većoj osnovici trapeza je 90^0. Dokazati da je duž čiji su krajevi središta osnovica jednaka duži čiji su krajevi središta dijagonala trapeza.

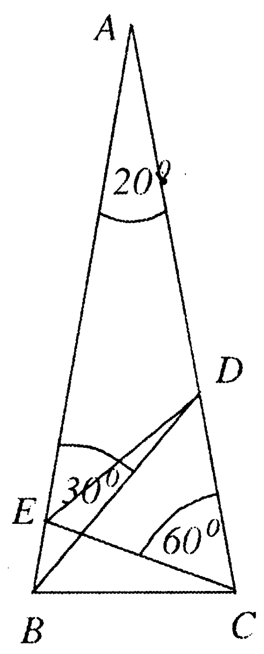
Rj.

Prvo rješenje: Neka je $\overline{AB}=a, \overline{CD}=c$, P središte od AC, Q središte od BD, M središte od AD i N središte od BC. Neka je dalje, $\overline{MP}=x, \overline{QN}=y$. Tada je $x=y=\frac{c}{2}$, jer su MP i QN srednje linije trouglova ΔACD i ΔBCD respektivno. Sada je $\overline{PQ}=\overline{MN}-x-y=\frac{a+c}{2}-\frac{c}{2}-\frac{c}{2}=\frac{a-c}{2}$. Neka je E tačka presjeka pravih AD i BC. Tada je ugao $\measuredangle AED=90^0$. To znači da je trougao ΔABE pravougli trougao. Tada je težišnica koja odgovara hipotenuzi jednaka polovini hipotenuze. Neka su S i R središta duži AB i CD respektivno. Tada je $\overline{ES}=\overline{AS}=\overline{BS}=\frac{a}{2}$. Iz istih razloga je $\overline{ER}=\frac{c}{2}$. Konačno imamo $\overline{SR}=\overline{SE}-\overline{RE}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}$. Prema tome je $\overline{PQ}=\overline{SR}$.

Drugo rješenje: Uz oznake iz prethodnog rješenja četverougao $PSQR$ je paralelogram u kojem je $\measuredangle OPR=\measuredangle BAD$ i $\measuredangle PQR=\measuredangle ABC$. Odavde je $\measuredangle QPR+\measuredangle PQR=90^0$. Zato je $\measuredangle PRQ=180^0-90^0=90^0$. To znači da je paralelogram $PSQR$ pravougaonik. Kod pravougaonika su dijagonale jednake. Zato je $\overline{SR}=\overline{PQ}$.

#

U jednakokrakom trouglu ΔABC ugao $\measuredangle BAC$ naspram osnovice BC iznosi 20^0. Na krakovima AB i AC uzete su redom tačke E i D tako da je $\measuredangle ACE=60^0$ i $\measuredangle ABD=30^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AED$.



Rj. Uglovi na osnovici su 80^0. Tada je $\measuredangle DBC=80^0-30^0=50^0$. Dalje iz trougla ΔBCD nalazimo $\measuredangle BDC=180^0-80^0-50^0=50^0$. To znači da je trougao ΔBCD jednakokrak. Tada je $\overline{BC}=\overline{CD}$. Na isti način se pokazuje da je trougao ΔBCE jednakokrak. Tada je $\overline{BC}=\overline{CE}$. Dakle, $\overline{CE}=\overline{CD}$. To znači da je trougao ΔECD jednakokrak, pa je $\measuredangle CED=\measuredangle ECD$. Kako je ugao između njegovih krakova 60^0, to je taj trougao jednakostraničan, pa su mu sva tri unutrašnja ugla po 60^0. Zbog toga je $\measuredangle AED=180^0-\measuredangle DEC-\measuredangle CEB=180^0-60^0-80^0=40^0$.

Pravougaonik je podjeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine četiri od njih su $5,3,9$ i 2 kvadratne jedinice (vidi sliku). Odrediti najmanju moguću vrijednost površine pravougaonika. Pod kojim uslovima pravougaonik ima tu minimalnu površinu?

5	3	
	9	
		2

Rj. Neka su redom x,y i z širine prve, druge i treće kolone, a u,v i w visine prve, druge i treće vrste. Na osnovu datih podataka imamo: $xu=5,\ yu=3,\ yv=9,\ zw=2$.
Odavde je:

$$x=\frac{5}{u},\ y=\frac{3}{u},\ z=\frac{2}{w}.$$

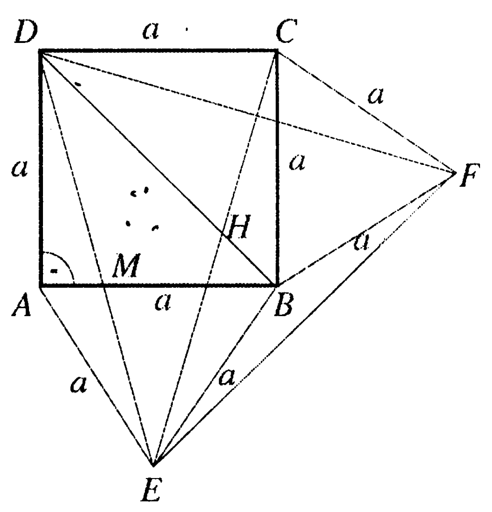
5	3		u
	9		v
		2	w
x	y	z	

Površina cijelog pravougaonika je:

$$P=19+xv+xw+yw+zu+zv=34+8\left(\frac{w}{u}+\frac{u}{w}\right)\geq 34+8\cdot 2\sqrt{\frac{w}{u}\cdot\frac{u}{w}}=50.$$

Površina pravougaonika je 50, ako i samo ako je $u=w=\frac{v}{3}$.

Četverougao $ABCD$ je kvadrat izvan kojeg se nalaze tačke E i F tako da su trouglovi ΔABE i ΔBCF jednakostranični. Neka je tačka M središte duži DE i $\{H\}=CE\cap DB$. Dokazati da je trougao ΔDEF jednakostranični.



Rj. Imamo $\overline{AE}=\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{CF}=\overline{BF}=\overline{BE}=a$. Također, imamo pošto su trouglovi ΔBCF i ΔABE jednakostranični, onda je i: $\measuredangle EAD=\measuredangle DCF=\measuredangle EBF=150^0$, pa su trouglovi $\Delta ADE, \Delta DCF$ i ΔBEF podudarni po stavu I (SUS), tj. $\Delta ADE\cong\Delta DCF\cong\Delta BEF$, a odavde slijedi da je $\overline{DE}=\overline{DF}=\overline{EF}$, što znači da je trougao ΔDEF jednakostranični, q.e.d.

\# U jednakokrakom trouglu ΔABC, $\overline{AC} = \overline{BC}$, osnovica AB ima dužinu $\sqrt{3}$ i visina CD ima dužinu $\sqrt{2}$. Neka su E i F sredine stranica CB i DB respektivno, a G tačka presjeka pravih AE i CF. Dokazati da se tačka D nalazi na simetrali ugla $\measuredangle AGF$.

5. Da bi dokazali da se tačka D nalazi na simetrali ugla $\measuredangle AGF$ dovoljno je dokazati da je ona jednako udaljena od krakova tog ugla. Neka je x udaljenost tačke D od kraka GF, a y udaljenost od kraka GA. Visina trougla ΔCDF je x, pa je

$$x = \frac{2 \cdot P_{\Delta CDF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{DF} \cdot \overline{CD}}{\overline{CF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{2}}{\overline{CF}} = \frac{\sqrt{6}}{4\overline{CF}}.$$

Dužinu stranice CF odredićemo iz pravouglog trougla ΔCDF pomoću Pitagorine teoreme. Imamo

$$\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2 = \frac{35}{16}.$$

Tada je $x = \sqrt{\frac{6}{35}}$.

Odredimo sada y. U trouglu ΔADE je y visina, pa je

$$y = \frac{2 \cdot P_{\Delta ADE}}{\overline{AE}}.$$

Trouglovi ΔADE i ΔDBE imaju jednake površine, jer je ED težišna linija trougla ΔABE. Zbog toga je

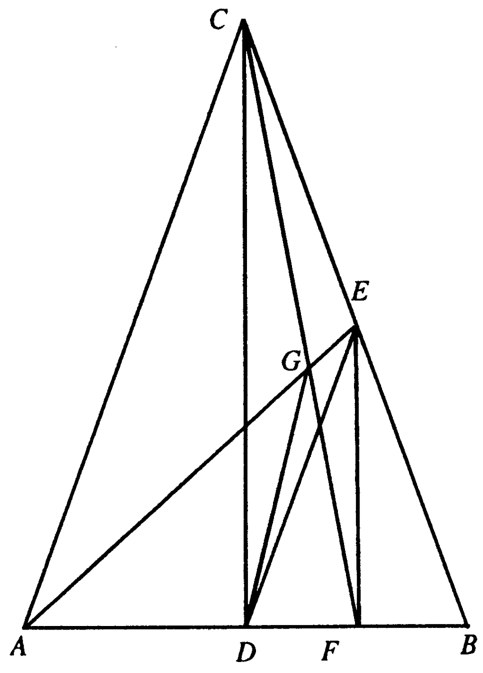
$$P_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} P_{\Delta ABE} = \frac{1}{4} P_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

Primjetimo da je EF srednja linija trougla ΔCDB, pa je $EF \perp AB$ i $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dakle, trougao ΔAFE je pravougli, pa na osnovu Pitagorine teoreme imamo

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{FE}^2} = \frac{\sqrt{35}}{4}.$$

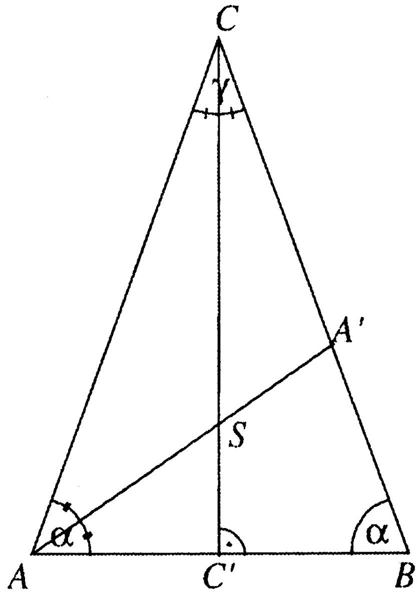
Konačno imamo

$$y = \frac{2 \cdot P_{\Delta ADE}}{\overline{AE}} = \sqrt{\frac{6}{35}} = x.$$



#
U jednakokrakom trouglu ΔABC ugao koga obrazuju simetrala ugla između krakova i simetrala ugla na osnovici je tri puta veći od ugla na osnovici. Šta je veće: osnovica ili krak tog trougla?

R.: Neka je S presječna tačka ovih simetrala, a C' presječna tačka simetrale iz vrha C i osnovice AB trougla ΔABC (CC' je ujedno i visina trougla, pa je $\Delta AC'C$ pravougli).



a) Razmotrimo slučaj $\measuredangle ASC = 3\alpha$

Iz trougla ΔASC imamo

$$\frac{\alpha}{2} + 3\alpha + \frac{\gamma}{2} = 180^0, \qquad (1)$$

a iz trougla $\Delta AC'C$

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^0. \qquad (2)$$

Tako vrijedi

$$180^0 \overset{(1)}{=} \frac{\alpha}{2} + 3\alpha + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) \overset{(2)}{=} \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + 90^0$$

$$\Rightarrow \frac{5\alpha}{2} = 90^0 \Rightarrow \alpha = 36^0.$$

Iz (2) se dobije: $\frac{\gamma}{2} = 90 - \alpha = 90^0 - 36^0 = 54^0 \Rightarrow \gamma = 108^0$. Dakle, $\gamma > \alpha$, pa je $\overline{AB} > \overline{BC}$ (tj. osnovica je veća od kraka), jer naspram većeg ugla u trouglu leži veća stranica.

b) Razmotrimo slučaj kada je $\measuredangle A'SC = 3\alpha$. ($A'$ je presječna tačka simetrale ugla na osnovici sa krakom BC). Sada je $\measuredangle ASC = 180^0 - 3\alpha$.

Iz trougla ΔASC imamo:

$$\frac{\alpha}{2} + 180^0 - 3\alpha + \frac{\gamma}{2} = 180^0 \Rightarrow \gamma = 5\alpha > \alpha,$$

dakle, u svakom slučaju je osnovica veća od kraka trougla.

#

Simetrale uglova α i β jednakostraničnog trougla ΔABC sijeku se u tački S. Na stranici AB izabrana je tačka M i na stranici AC tačka N, tako da je $\overline{AM}+\overline{AN}=\overline{AB}$. Dokazati da je $\overline{SM}=\overline{SN}$ i izračunati veličinu ugla $\measuredangle MSN$.

Rj. Trouglovi ΔASN i ΔBSM su podudarni (pravilo SUS), jer je

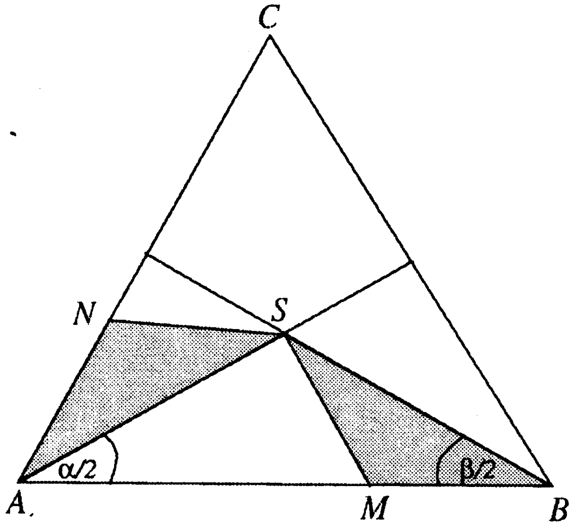
$\overline{MB}=\overline{AN}$ (prema uvjetima zadatka),

$\overline{AS}=\overline{BS}$ (jer su u jednakostraničnom trouglu simetrale uglova ujedno i težišnice),

$\measuredangle MBS=\frac{\beta}{2}=30^0=\frac{\alpha}{2}=\measuredangle NAS$.

Na osnovu toga je $\overline{SM}=\overline{SN}$. Zbog podudarnosti ovih trouglova vrijedi i $\measuredangle ASN=\measuredangle BSM$, pa je

$$\measuredangle MSN=\measuredangle MAS+\measuredangle ASN=\measuredangle MAS+\measuredangle BSM=\measuredangle ASB$$
$$=180^0-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=120^0.$$



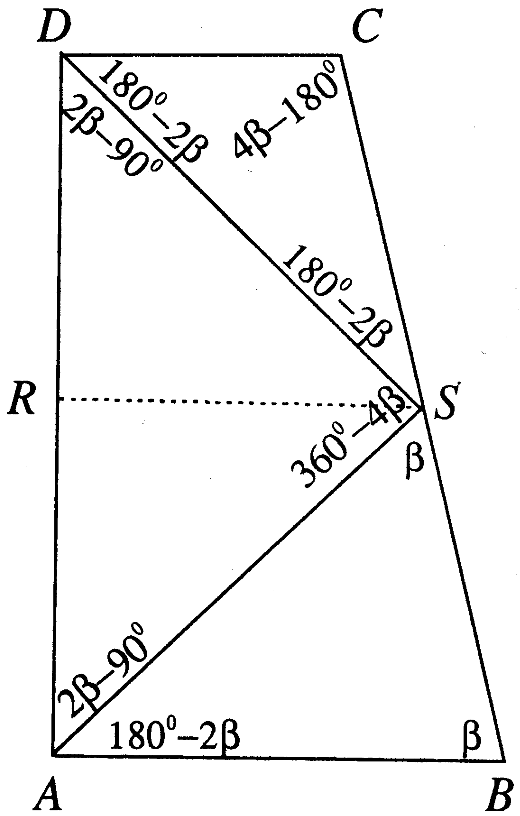
#

Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je uago $\measuredangle BAC>50^0$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je uago $\measuredangle BAM=50^0$, a na kraku AC tačka N takva da je $\overline{AM}=\overline{AN}$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$?

Rj. Trougao ΔABC je jednakokraki, pa je $\alpha+2\beta=180^0$. Trougao ΔAMN je jednakokraki pa su uglovi $\measuredangle AMN$ i $\measuredangle ANM$ jednaki i označimo ih sa δ. Na osnovu zbira uglova trougla ΔAMN imamo $\alpha-50^0+\delta+\delta=180^0$. Dakle, $2\delta+\alpha-50^0=\alpha+2\beta$, tj. $\delta=\beta+25^0$. Ugao $\delta=\measuredangle MNA$ je vanjski ugao trougla ΔAMN, pa je $\measuredangle ANM=\measuredangle NMC+\measuredangle MCN$, tj. $\delta=\measuredangle NMC+\beta$. Dakle, $\measuredangle NMC=25^0$.

#. Središte dužeg kraka pravouglog trapeza spojeno je dužima sa vrhovima trapeza koja pripadaju drugom kraku. Pri tome je trapez podijeljen na tri jednakokraka trougla. Odrediti veličinu oštrog ugla trapeza.

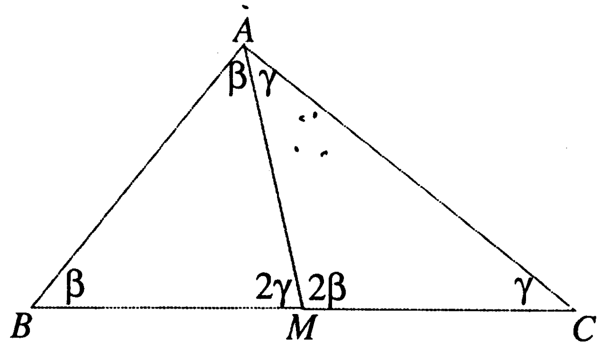
R.: Neka je SR srednja linija trapeza. Ona je tada istovremeno i visina i težišnica trougla ΔADS, što je moguće samo ako je AD osnovica trougla ΔADS (jednakokraki trougao!) ili kad je trougao ΔADS jednakostranični (ova druga mogućnost otpada, jer se neposrednom provjerom dobije ili $\beta > 90^0$ ili $\measuredangle BCD = 90^0$, što je kontradikcija).



Ako pretpostavimo da je $\overline{AB} = \overline{BS}$ dolazimo do zaključka da je to moguće kada je $\beta = 90^0$, što je kontradikcija. Dakle, preostaje: $\overline{AB} = \overline{AS}, \overline{AS} = \overline{DS}$ i $\overline{CD} = \overline{CS}$ (naime, zbog činjenice da je $\measuredangle BCD$ tupi, za trougao ΔSDC je jedina mogućnost $\overline{CD} = \overline{CS}$). Uzimajući u obzir pretpostavku zadatka i činjenicu da je zbir uglova u trouglu 180^0, te označavajući sa β oštar ugao trapeza, imaćemo situaciju kao na slici. Kako je $\measuredangle BCD + \beta = 180^0$, imamo $4\beta - 180^0 + \beta = 180^0 \Rightarrow 5\beta = 360^0 \Rightarrow \beta = 72^0$.

#. Izračunati $\measuredangle A$ trougla ΔABC čija je dužina težišnice $d(A,M) = \frac{1}{2} d(B,C)$.

R.: Kako je $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, to su trouglovi ΔAMC i ΔABM jednakokraki pa je $\measuredangle MAB = \measuredangle MBA = \beta$ i $\measuredangle ACM = \measuredangle MAC = \gamma$. Kako je vanjski ugao trougla jednak zbiru dva unutrašnja njemu nesusjedna ugla, to je $\measuredangle BMA = 2\gamma$ i $\measuredangle CMA = 2\beta$.



Dalje imamo $2\beta + 2\gamma = 180^0 \Rightarrow \beta + \gamma = 90^0$, tj. $\measuredangle A = 90^0$

#

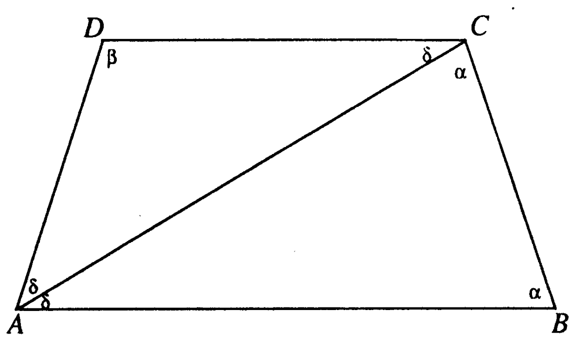
Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

Rj.

Neka je jednakokraki trapez $ABCD$ dijagonalom AC razbijen na jednakokrake trouglove ΔBCA i ΔACD.

Tada je:

$$\measuredangle CAD = \measuredangle ACD (= \delta);$$
$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABC (= \alpha).$$



Međutim, u jednakokrakom trapezu $ABCD$ je $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$, tj. $\alpha = 2\delta$, kao i $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD (= \beta)$, pa je $\beta = \alpha + \delta$.

Iz trougla ΔABC slijedi $2\alpha + \delta = 180^0$. Dakle, zbog $\alpha = 2\delta$, imamo

$$4\delta + \delta = 180^0 \Rightarrow 5\delta = 180^0 \Rightarrow \delta = 36^0,$$

pa je

$$\alpha = 72^0 \text{ i } \beta = \alpha + \delta = 36^0 + 72^0 = 108^0.$$

#

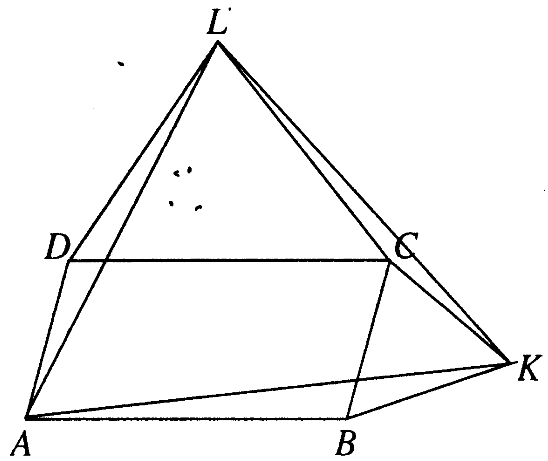
Nad stranicama BC i CD paralelograma $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi ΔBKC i ΔDLC. Dokazati da je trougao ΔAKL jednakostraničan.

Rj.

Neka je $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$. Prema uslovu zadatka je $a = \overline{CD} = \overline{DL} = \overline{LC} = \overline{AB}$ i $b = \overline{BC} = \overline{BK} = \overline{CK} = \overline{AD}$. Neka je, dalje, $\measuredangle BCD = \alpha$ i $\measuredangle ADC = \beta$. Tada je $\beta = 180^0 - \alpha$.

Imamo

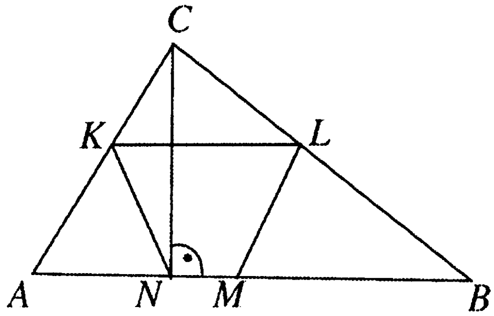
$$\measuredangle ADL = \beta + 60^0 = 240^0 - \alpha,$$
$$\measuredangle KCL = 360^0 - \left(60^0 + \alpha + 60^0\right) = 240^0 - \alpha \text{ i}$$
$$\measuredangle ABK = \beta + 60^0 = 240^0 - \alpha.$$



To znači da su trouglovi $\Delta ABK, \Delta CKL$ i ΔALD podudarni. Iz podudarnosti trouglova slijedi jednakost odgovarajućih stranica, pa je $\overline{AL} = \overline{LK} = \overline{KA}$, tj. trougao ΔAKL je jednakostraničan.

Zadan je trougao ΔABC. Dokazati da su sredine stranica i podnožje bilo koje visine u zadanom trouglu vrhovi jednakokrakog trapeza.

Prvi način: Neka su K, L i M središta stranica AC, BC i AB trougla ΔABC, redom, a N podnožje visine iz vrha C.



Imamo $KL \| AB \Rightarrow MNKL$ je trapez (srednja linija trougla je paralelna osnovici),

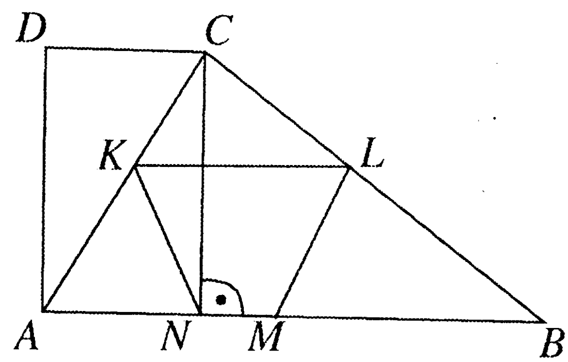
$\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ (osobina srednje linije trougla),

ΔANC je pravougli i NK je njegova težišnica, pa slijedi da je $\overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Prema tome $\overline{LM} = \overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, pa je četverougao $KLMN$ jednakokraki trapez.

Drugi način: Imamo:

$KL \| AB \Rightarrow MNKL$ je trapez (srednja linija trougla je paralelna osnovici)

Konstruišimo pravougaonik $ANCD$. Tačka K je središte dijagonale AC tog pravougaonika, pa je $\overline{AK} = \overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. S druge strane je $\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ (osobina srednje linije trougla), odakle slijedi $\overline{LM} = \overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, pa je četverougao $KLMN$ jednakokraki trapez.



#

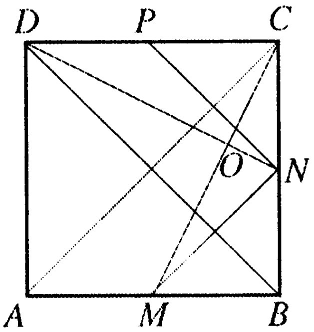
U kvadratu $ABCD$ tačke M, N i P su središta stranica AB, BC i CD redom. Dokazati da važi:

a) $DN \perp CM$;

b) $\measuredangle DNP = \measuredangle CMN$.

R.

a) Neka je $\{O\} = CM \cap DN$. Očigledno je $\Delta DCN \cong \Delta BCM$ (SUS, jer je $\overline{DC} = \overline{BC}, \overline{CN} = \overline{BM}, \measuredangle DCN = \measuredangle CBM = 90^0$), pa odavde slijedi da je $\overline{DN} = \overline{CM}$ i $\measuredangle CDN = \measuredangle BCM$.



Sada imamo:

$$\measuredangle OCN + \measuredangle CNO = \measuredangle CDN + \measuredangle CND = 90^0 ,$$

pa slijedi iz ΔOCN da je $\measuredangle CON = 90^0$, tj. $DN \perp CM$, što je trebalo dokazati.

b) Duž PN je srednja linija trougla ΔBCD pa je $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Slično zaključujemo da je $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ jer je MN srednja linija trougla ΔABC . Pošto je $\overline{AC} = \overline{BD}$, to je sada i $\overline{PN} = \overline{MN}$. Također imamo da je $\overline{DP} = \overline{CN}$ i $\overline{DN} = \overline{MC}$, pa je $\Delta DPN \cong \Delta CMN$ (SSS), a odavde je $\measuredangle DNP = \measuredangle CMN$, što je i trebalo dokazati.

#

U kvadrat $ABCD$ stranice dužine 1 upisan je trougao ΔPQR tako da $P \in AD, Q \in CD$ i $R \in BC$. Dokazati da je površina trougla $\Delta PQR \leq \frac{1}{2}$. Kada vrijedi jednakost?

R.

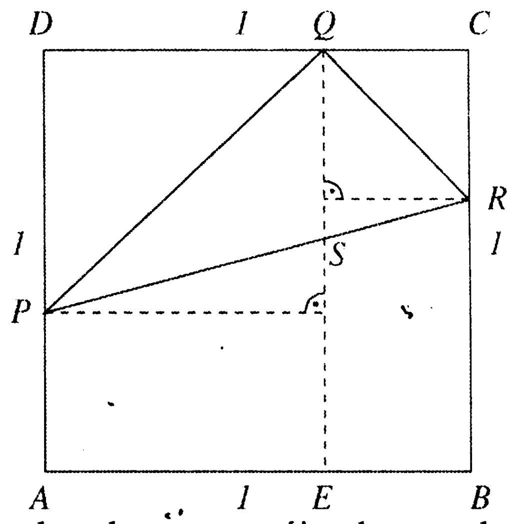
Povucimo duž $QE \parallel BC$, $E \in AB$. Neka je $\{S\} = PR \cap QE$.

Sada je

$$P_{\Delta PQR} = P_{\Delta PQS} + P_{\Delta QSR} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{QS} \cdot \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{QS} \cdot \overline{EB}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{QS}(\overline{AE} + \overline{EB}) = \frac{1}{2}\overline{QS} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{QS} \leq \frac{1}{2}$$



(jer je $\overline{QS} \leq 1$). q.e.d.

Jednakost vrijedi ako je jedna stranica trougla osnovica kvadrata, a treći vrh se nalazi na naspramnoj paralelnoj stranici. Tada su osnovica i visina trougla dužine 1 .

U oštrouglom trouglu ΔABC $\left(\overline{AC}<\overline{BC}\right)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = CM$ ugla γ zaklapaju ugao od 9^0, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od 61^0. Odrediti uglove trougla ΔABC.

R:

· Neka je

α' - spoljašnji ugao kod vrha A

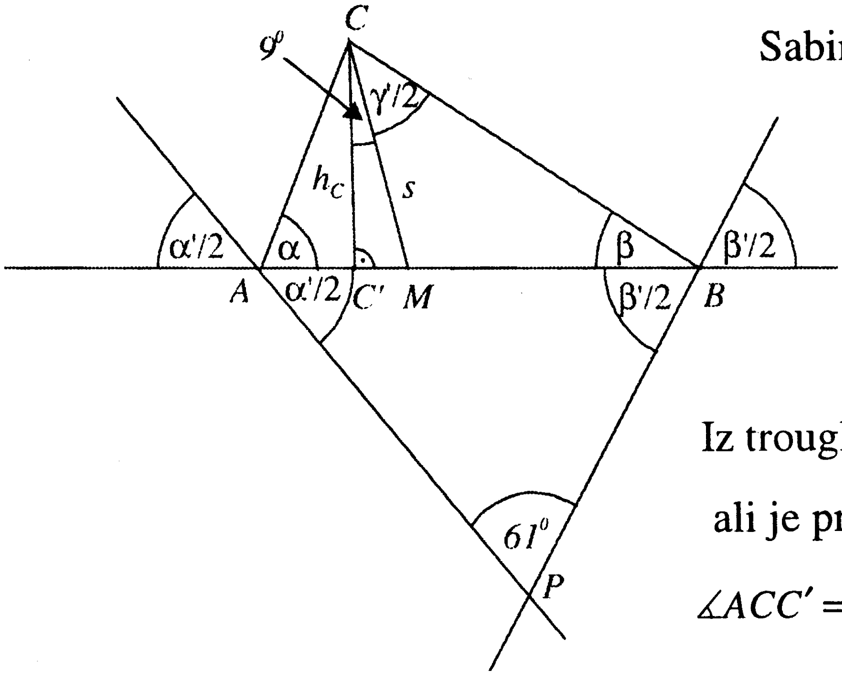
β' - spoljašnji ugao kod vrha B

Kako je vanjski ugao trougla jednak zbiru dva nesusjedna unutrašnja ugla, to je

$$\beta' = \alpha + \gamma \text{ i } \alpha' = \beta + \gamma . \tag{1}$$

Iz trougla ΔABP imamo

$$\frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{2} = 180^0 - 61^0 = 119^0 \Rightarrow \alpha' + \beta' = 238^0 .$$



Sabiranjem jednakosti (1), dobijamo:

$$\left(\underbrace{\alpha + \beta + \gamma}_{=180^0}\right) + \gamma = 238^0$$

$$\Rightarrow \gamma = 58^0 .$$

Iz trougla $\Delta ACC'$ imamo $\alpha + \measuredangle ACC' = 90^0$,

ali je prema uslovima zadatka

$$\measuredangle ACC' = \frac{\gamma}{2} - 9^0 = 29^0 - 9^0 = 20^0 ..$$

Zbog toga je

$$\alpha + 20^0 = 90^0 \Rightarrow \alpha = 70^0 .$$

Konačno imamo

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

$$70^0 + \beta + 58^0 = 180^0 \Rightarrow \beta = 180^0 - 128^0 = 52^0 .$$

Znači, $\alpha = 70^0, \beta = 52^0, \gamma = 58^0$.

\# U trouglu ΔABC su date stranice a i b. Ako je $h_c = h_a + h_b$, izračunati stranicu c.

Rj. Površina trougla ΔABC se može izračunati iz bilo koje od formula:

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Odavde dobijamo

$$h_a = \frac{2P}{a}, \quad h_b = \frac{2P}{b}, \quad h_c = \frac{2P}{c}.$$

Sada uvjet $h_c = h_a + h_b$ postaje:

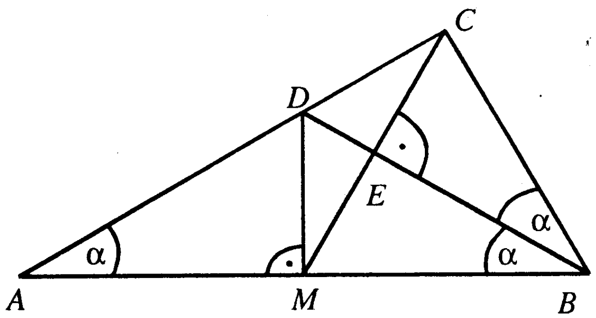
$$\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b}$$

ili nakon djeljenja sa $2P$:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \text{tj.} \ \frac{1}{c} = \frac{b+a}{ab} \quad \text{te} \quad c = \frac{ab}{a+b}.$$

\# U trouglu ΔABC je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija CM je normalna (ortogonalna) na simetralu BD ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla ΔABC.

Rj. Neka je BD simetrala ugla trougla ΔABC sa vrhom (tjemenom) u B. Tada je $\measuredangle DBM = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \measuredangle BAC$. To znači da je trougao ΔABD jednakokraki sa osnovicom AB. Tačka M je središte osnovice, pa je DM normalno na AB. Neka BD siječe CM u tački E.



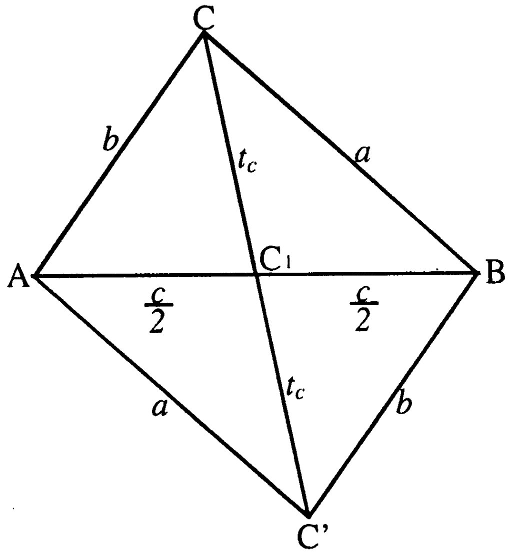
Tada je $\Delta BEM \cong \Delta BCE$ jer je $\overline{BE} = \overline{BE}, \measuredangle MBE = \measuredangle CBE = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$ i $\measuredangle MEB = \measuredangle CEB = 90^0$.

Iz podudarnosti slijedi da je $\overline{BM} = \overline{BC}$. Tada je $\Delta MBD \cong \Delta CBD$. Iz te podudarnosti slijedi da je $\measuredangle BCD = \measuredangle BMD = 90^0$. Dakle, $\gamma = 90^0$. Kako je $\beta = 2\alpha$, to je $90^0 = \alpha + \beta = 3\alpha$, tj. $\alpha = 30^0$ i $\beta = 60^0$.

\# Neka su a,b i c dužine stranica trougla i t_c dužina težišnice povučene iz vrha (tjemena) C. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}.$$

R. Neka je ΔABC trougao čije su dužine stanica a,b,c i dužina težišne duži $\overline{CC_1} = t_c$. Na osnovu odnosa između stranice trougla i zbira drugih dviju stanica nalazimo iz trougla ΔAC_1C da je



$$b < \frac{c}{2} + t_c$$

a iz trougla ΔCC_1B da je

$$a < \frac{c}{2} + t_c.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$a + b < c + 2t_c,$$

odnosno

$$t_c > \frac{a+b-c}{2}.$$

Dokažimo sada da je $t_c < \dfrac{a+b}{2}$.

Neka je C' simetričnu tačka tački C u odnosu na tačku C_1. Tada je $\overline{CC_1} = \overline{C_1C'}$, a kako je $\overline{AC_1} = \overline{C_1B}$, to je četverougao $AC'BC$ paralelogram. Dakle, $\overline{BC'} = \overline{AC} = b$. Iz trougla $\Delta CC'B$, dobijamo:

$$\overline{CC'} < \overline{BC} + \overline{C'B}, \text{ tj. } 2t_c < a + b,$$

pa je

$$t_c < \frac{a+b}{2}.$$

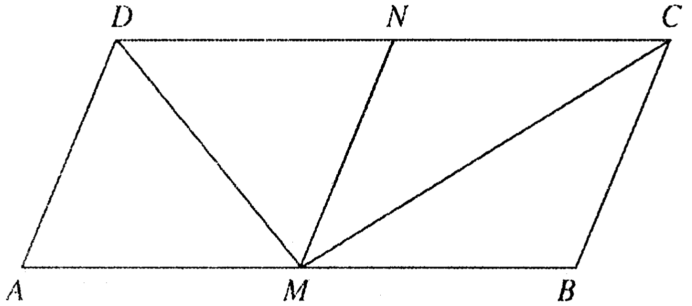
Dakle, imamo da je

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2},$$

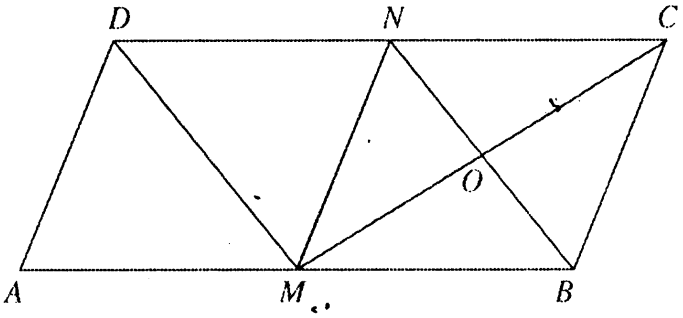
što je i trebalo dokazati.

Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Središte M stranice AB spojeno je sa tjemenima C i D. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

Rješenje 3. Koristićemo sliku 2. Kako su dijagonale romba ujedno i simetrale unutrašnjih uglova (poznato svojstvo romba), to su MC i MD simetrale dva uporedna ugla, $\measuredangle BMN$ i $\measuredangle AMN$. Zbog toga je ugao između njih jednak polovini opruženog ugla, tj. $\measuredangle CMD = 90^0$.



sl.2



sl.3

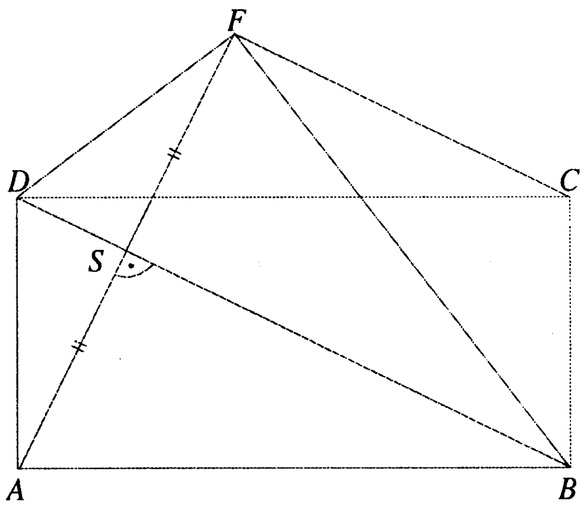
Rješenje 4. Neka je N središte duži CD i O presjek dijagonala romba $CNMB$ (sl.3). Jasno je da $\overline{BN} = \overline{MD}$ i $BN \parallel MD$. Zato je $\measuredangle CMD = \measuredangle CON$ (uglovi s paralelnim kracima). Kako se dijagonale romba sijeku pod pravim uglom, tj. $\measuredangle CON = 90^0$, zaključujemo da je $\measuredangle CMD = 90^0$.

Iz tjemena A pravougaonika $ABCD$ spuštena je normala na dijagonalu pravougaonika i produžena za istu dužinu do tačke F. Dokazati da je:

a) duž BF normalna na duž DF;

b) četverougao $BDFC$ jednakokraki trapez.

R. a) Zbog $\overline{AS} = \overline{FS}$ i $\measuredangle ASD = \measuredangle FSD = 90^0$ slijedi: $\Delta ASD \cong \Delta FSD$ te $\Delta ABS \cong \Delta BFS$. Sada je $\overline{AD} = \overline{DF}$ i $\overline{AB} = \overline{BF}$; što znači da je četverougao $ABFD$ deltoid. Kako je $\measuredangle DAB = 90^0$, to je i $\measuredangle DFB = 90^0$, tj. $DF \perp BF$.



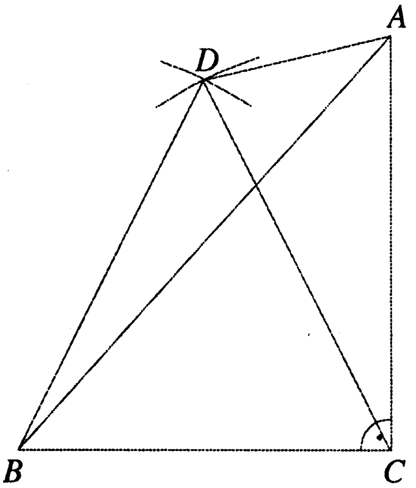
b) Kako je $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{BC}$, to je $\Delta DBF \cong \Delta DCB$ pa je $\overline{BF} = \overline{DC}$, pa je četverougao $BDFC$ jednakokraki trapez.

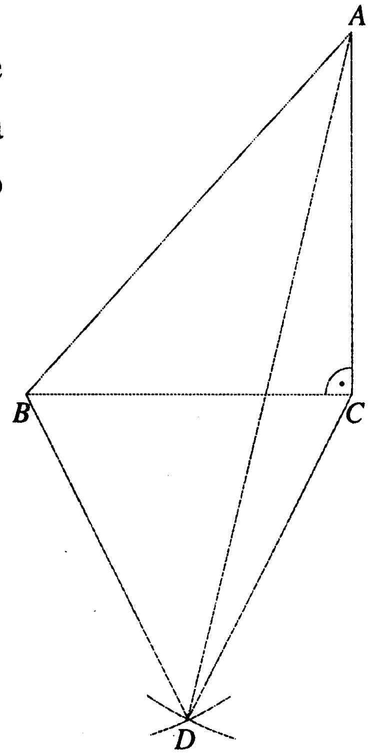
\# Dat je jednakokrako-pravougli trougao ΔABC s pravim uglom kod vrha C. Nad stranicom (katetom) BC konstruisan je jednakostranični trougao ΔBCD (razlikovati dva slučaja). Izračunati veličinu ugla $\angle ADB$.

R: Razlikujemo dva slučaja:

1^0 Očigledno je $\measuredangle ACD = 90^0 - 60^0 = 30^0$. Kako je $\overline{CD} = \overline{CA}$, slijedi da je trougao $\Delta\ CAD$ jednakokraki; pa je $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 75^0$, a zbog $\measuredangle CBD = 60^0$, zaključujemo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle CDA + \measuredangle CDB$, tj. $\measuredangle ADB = 75^0 + 60^0 = 135^0$.

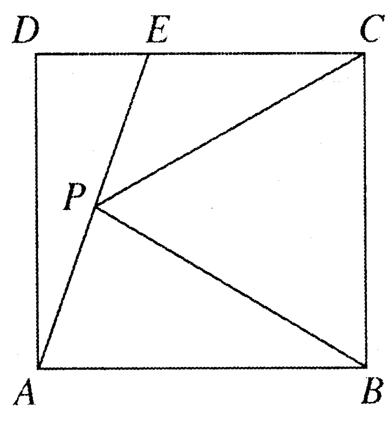
2^0 Očigledno je $\measuredangle ACD = 90^0 + 60^0 = 150^0$. Kako je $\overline{CA} = \overline{CD}$, slijedi da je trougao $\Delta\ CAD$ jednakokraki pa je $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 15^0$, a zbog $\measuredangle CDB = 60^0$, zaključujemo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle CDB - \measuredangle CDA$, tj. $\measuredangle ADB = 60^0 - 15^0 = 45^0$.





\# Dat je kvadrat $ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka P tako da je trougao ΔBCP jednakostraničan. Prava AP siječe stranicu CD u tački E. Odredite mjerni broj ugla $\angle CPE$. Odgovor obrazložiti!

R: Budući da je $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BP}$ zaključujemo da je trougao ΔABP jednakokraki. To znači da je $\angle PAB = \angle APB$. Nadalje iz $\angle PBC = 60^0$ i $\angle ABC = 90^0$ slijedi da je $\angle ABP = 30^0$. Zbir unutrašnjih uglova bilo kog trougla je 180^0, pa i u trouglu ΔABP. Zbog toga je $2 \cdot \angle APB = 180^0 - 30^0 = 150^0$. Odavde je $\angle APB = 75^0$. Sada nalazimo da je $\angle CPE = 180^0 - 75^0 - 60^0 = 45^0$.



#

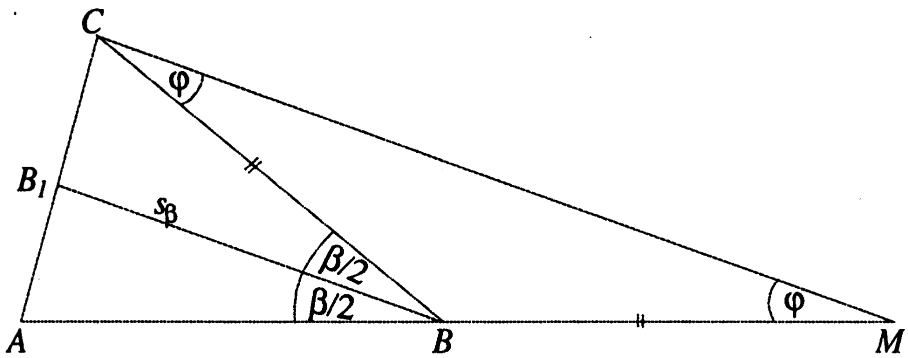
Na produžetku stranice AB trougla ΔABC iza B u odnosu na A data je tačka M, tako da je $\overline{BM} = \overline{BC}$. Dokazati da je prava MC paralelna simetrali ugla ΔABC.

Rj.

P: $\overline{BM} = \overline{BC}$, $BB_1 = s_\beta$ simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

T: $MC \| BB_1$.

Zbog $\overline{BM} = \overline{BC}$, trougao ΔBMC je jednakokraki pa je $\varphi = \measuredangle BMC = \measuredangle BCM$. Po teoremi o vanjskom uglu trougla ΔBMC je $\measuredangle ABC = 2\varphi$, tj. $\beta = 2\varphi$, a odavde $\varphi = \dfrac{\beta}{2}$. Pošto je sada $\measuredangle ABB_1 = \measuredangle BMC = \varphi = \dfrac{\beta}{2}$, to je $BB_1 \| MC$ (uglovi sa paralelnim



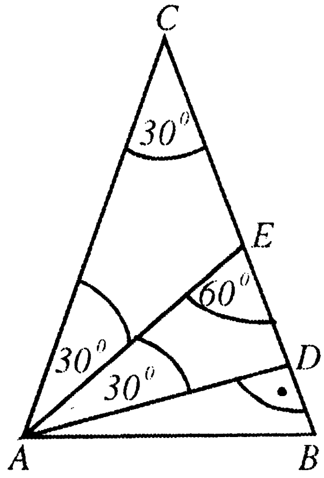
kracima), što je i trebalo dokazati.

#

U trouglu ΔABC je $\overline{AC} = \overline{BC}$, a visina AD sa simetralom AE ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od 30^0. Naći uglove trougla ΔABC i dokazati da je $\overline{AE} = \overline{EC}$. Odgovor obrazložiti!

Rj.

Trougao ΔADE je pravougli kod kojeg je jedan oštar ugao 30^0. Tada je drugi njegov ugao 60^0. Dakle, $\measuredangle AED = 60^0$. Ugao $\measuredangle AED$ je vanjski ugao trougla ΔAEC, pa je $60^0 = \measuredangle AED = \measuredangle ACE + 30^0$. Odavde slijedi $\measuredangle ACE = 30^0$. Kako je trougao ΔABC jednakokraki to je $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = 75^0$. Trougao ΔAEC je jednakokraki jer ima dva unutrašnja ugla po 30^0. Zato je $\overline{AE} = \overline{EC}$.



\# Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Središte M stranice AB spojeno je sa tjemenima C i D. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

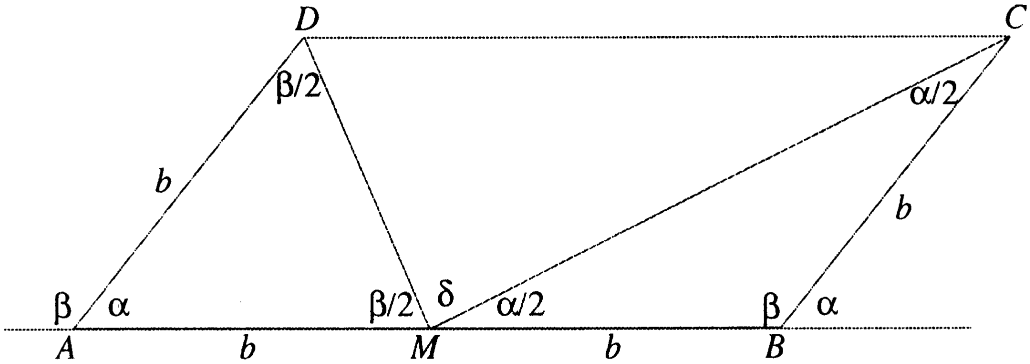
Rješenje 1. Trouglovi ΔAMD i ΔBMC su jednakokraki (sl.1). Kod trougla ΔAMD vanjski ugao u vrhu A je β (uglovi sa paralelnim kracima), a kod trougla ΔBMC vanjski ugao u vrhu B je α. To znači da je

$$\measuredangle AMD = \measuredangle ADM = \frac{\beta}{2}\ \text{, odnosno}$$

$$\measuredangle BMC = \measuredangle MCB = \frac{\alpha}{2}.$$

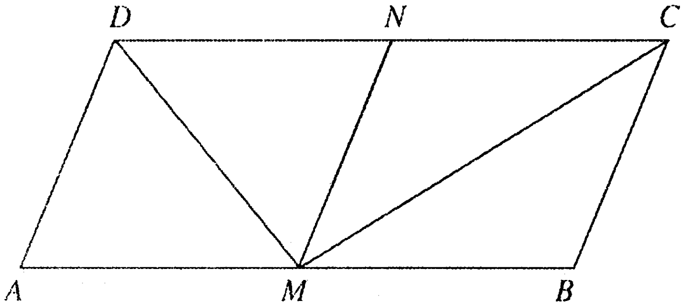
Očigledno, traženi ugao $\delta = \measuredangle CMD = 180^0 - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$,

tj. zbog $\alpha + \beta = 180^0$; $\delta = 180^0 - 90^0 = 90^0$.



sl.1

Rješenje 2. Neka je N središte stranice CD (sl.2). Tada je dati paralelogram podijeljen na dva podudarna romba $AMND$ i $BCNM$, pa je $\overline{MN} = \overline{CN} = \overline{ND}$. Zbog toga kružnica kojoj je duž CD prečnik sadrži tačku M. Budući da je svaki ugao nad prečnikom prav, to je $\measuredangle CMD = 90^0$.

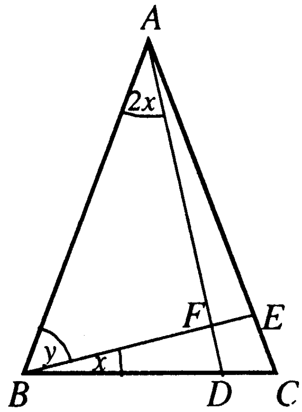


sl.2

(#) Trougao ΔABC je jednakokraki kod koga je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Neka su tačke $D \in BC$ i $E \in AC$ takve da je $\measuredangle EBC = \frac{1}{2}\measuredangle BAD$ i neka je tačka F presječna tačka pravih AD i BE, tj. $\{F\} = AD \cap BE$. Dokazati da je trougao ΔAFE jednakokraki.

R). Neka je $\measuredangle EBC = x$, te $\measuredangle BAD = 2x$ (po uslovu zadatka). Uzmimo da je $\measuredangle EBA = y$. Pošto je trougao ΔABC jednakokraki, to je:

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = x + y. \qquad (1)$$



Sada je $\measuredangle AFE = \measuredangle BAF + \measuredangle ABF = 2x + y$ (kao vanjski ugao trougla ΔABF). Također je $\measuredangle AEF = \measuredangle EBC + \measuredangle ACB \overset{(1)}{=} x + x + y = 2x + y$ (kao vanjski ugao trougla ΔBEC). Dobili smo da je: $\measuredangle AFE = \measuredangle AEF (= 2x + y)$, što znači da je trougao ΔAFE jednakokraki. Ovim je tvrdnja dokazana.

(#) Simetrale uglova $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle ACB$ trougla ΔABC se sijeku u tački I. Neka su tačke M i N simetrične tački I u odnosu na stranice BC i AB trougla. Koliko iznosi ugao $\measuredangle ABC$ ako je $BM \perp BN$?

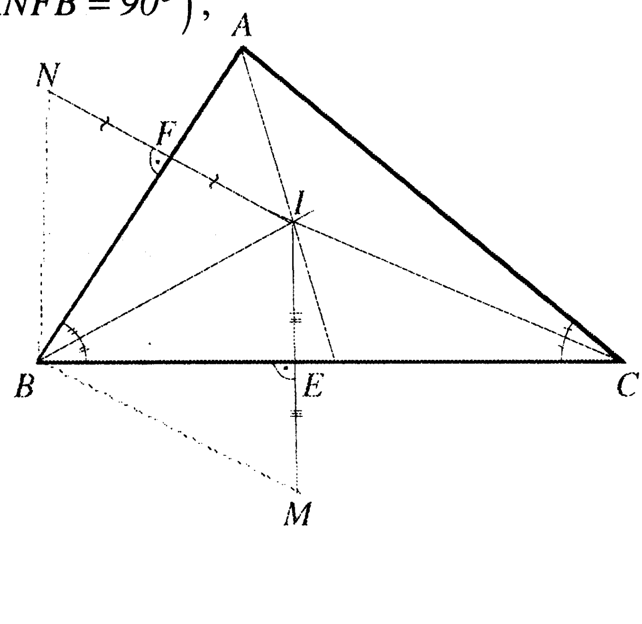
R). Neka je $IM \cap BC = \{E\}$ i $IN \cap AB = \{F\}$. Slijedi da je $\overline{IE} = \overline{EM}$ i $\overline{IF} = \overline{FN}$. Kako je

$$\Delta IEB \cong \Delta MEB \ \left(\overline{BE} = \overline{BE},\ \overline{IE} = \overline{EM},\ \measuredangle IEB = \measuredangle MEB = 90^0\right)$$

i $\Delta IFB \cong \Delta NFB \ \left(\overline{BF} = \overline{BF},\ \overline{IF} = \overline{FN},\ \measuredangle IFB = \measuredangle NFB = 90^0\right)$,

to dobijamo da je

$$\measuredangle IBE = \measuredangle EBM \ \text{ i } \ \measuredangle IBF = \measuredangle FBN.$$



Kako je IB simetrala ugla $\measuredangle ABC$ trougla, to je

$$\measuredangle NBF = \measuredangle FBI = \measuredangle IBE = \measuredangle EBM,$$

pa je $BM \perp BN$ ako i samo ako je $\measuredangle ABC = 45^0$.

#
Neka je četverougao $ABCD$ paralelogram. Tačka M je središte stranice BC, a tačka P je podnožje normale spuštene iz vrha D na pravu AM. Dokazati da je $\overline{CP} = \overline{AB}$.

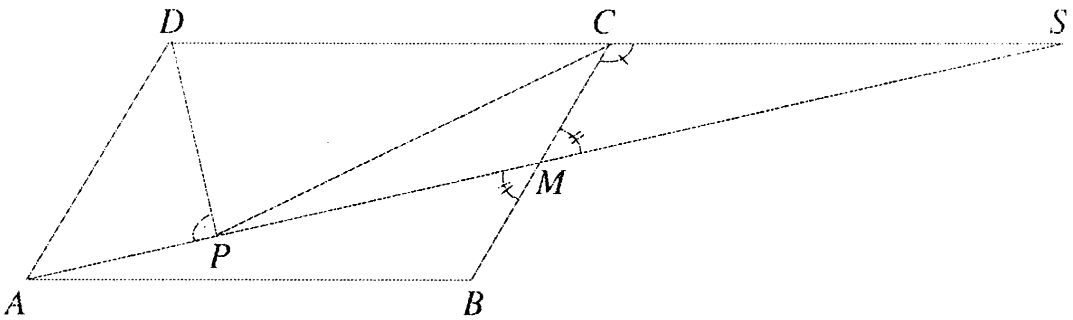
R. Neka je S presječna tačka pravih CD i AM, tj. $CD \cap AM = \{S\}$. Pošto je $\overline{CM} = \overline{BM}$, $\measuredangle AMB = \measuredangle SMC$ (unakrsni) i $\measuredangle ABM = \measuredangle MCS$ (naizmjenični), to je po pravilu USU: $\Delta ABM \cong \Delta SCM$, pa je

$$\overline{CS} = \overline{AB} \ . \qquad (1).$$

Kako je u paralelogramu

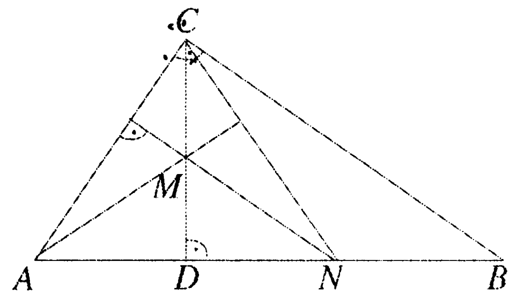
$$\overline{AB} = \overline{CD}, \qquad (2)$$

to dobijamo da je iz (1) i (2): $\overline{CS} = \overline{CD}$, pa je CP težišnica pravouglog trougla ΔPDS. Duž CP je ujedno poluprečnik opisanog kruga pravouglog trougla ΔPDS čiji je centar tačka C (Periferijski ugao $\measuredangle DPS$ je prav nad prečnikom DS). Dakle, $\overline{CP} = \overline{DC}$, te $\overline{CP} = \overline{AB}$, q.e.d.



#
Neka je CD visina na hipotenuzu pravouglog trougla ΔABC, tačka M središte duži CD i tačka N središte duži BD. Dokazati da je prava AM normalna (okomita) na pravu CN.

R. U trouglu ΔBCD duž MN je srednja linija, pa je $MN \| BC$. Kako je $BC \perp AC$, slijedi da je i $MN \perp AC$. S obzirom da je $CD \perp AN$, to znači da je tačka M ortocentar trougla ΔANC, pa je i AM visina tog trougla, tj. $AM \perp CN$, q.e.d.



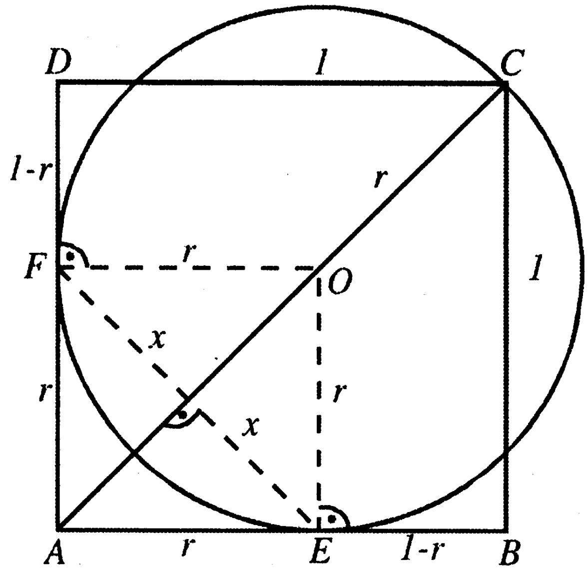
#

Zadan je kvadrat $ABCD$ dužine stranice $1dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

R.

Neka je $ABCD$ kvadrat stranice $a = 1dm$ i r poluprečnik kružnice koja dodiruje stranice AB i AD i prolazi kroz vrh (tjeme) C. Neka je $\overline{OA} = \overline{EF} = x$ (dijagonala kvadrata $AEOF$). Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ΔAEF nalazimo

$$x^2 = r^2 + r^2 \text{, tj. } x = r\sqrt{2}.$$



Analogno, iz pravouglog trougla ΔABC je

$$(x + r)^2 = 1^2 + 1^2 \text{, tj. } x^2 + 2xr + r^2 = 2.$$

Ako u posljednju jednačinu uvrstimo $x = r\sqrt{2}$, dobićemo poslije sređivanja

$$r^2(3 + 2\sqrt{2}) = 2,$$

$$r^2 = \frac{2}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{2}{(\sqrt{2} + 1)^2}$$

i

$$r = \sqrt{\frac{2}{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 - \sqrt{2},$$

dakle,

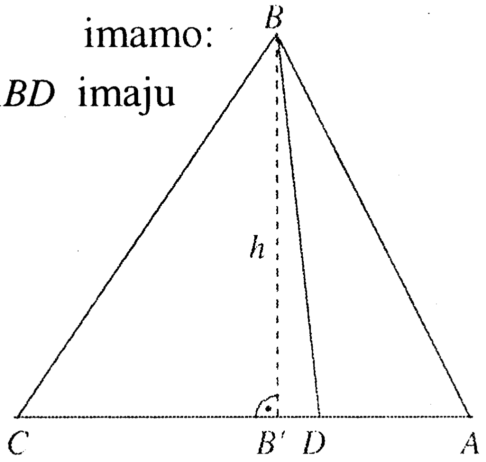
$$r = \left(2 - \sqrt{2}\right)dm.$$

#

Površina trougla ΔABC iznosi $18cm^2$. Tačka D uzeta je na stranici AC, tako da je $\overline{DC} = 2\overline{AD}$. Naći površine trouglova ΔABD i ΔDBC.

R.

Iz uvjeta $\overline{DC} = 2\overline{AD}$ zbog $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$ imamo: $\overline{AD} + 2\overline{AD} = \overline{AC}$, tj. $\overline{AC} = 3\overline{AD}$. Trouglovi ΔABC i ΔABD imaju zajedničku visinu ($\overline{BB'} = h$) iz vrha B, pa je:



$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\left(3\overline{AD}\right)\cdot h =$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot h\right) = 3P_{\Delta ABD}$$

tj. $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}P_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\cdot 18cm^2 = 6cm^2$.

Sada je $P_{\Delta DBC} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta ABD} = 18cm^2 - 6cm^2 = 12cm^2$.

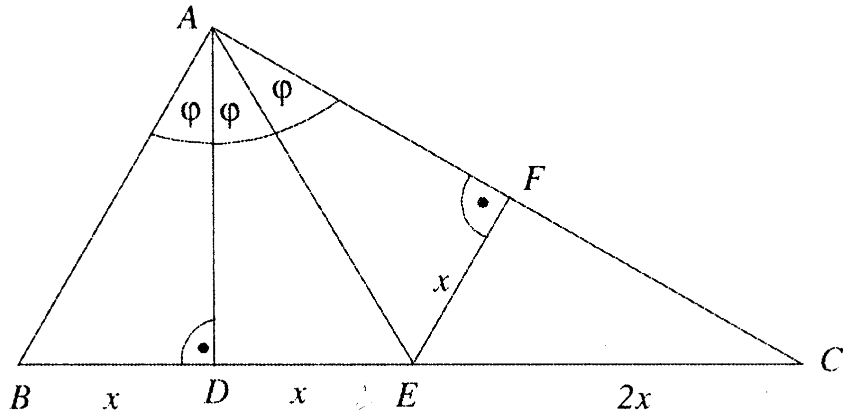
#

Težišnica i visina iz vrha A u trouglu ΔABC dijele ugao α na tri jednaka diela. Koliki su uglovi trougla ΔABC?

R.

Neka su tačke D i E podnožja visine i težišnice iz vrha A i neka je EF normalno na AC. Kako je $\measuredangle BAD = \measuredangle DAE = \measuredangle EAF = \varphi$, to su duži AD i AE simetrale uglova $\measuredangle BAE$ i $\measuredangle DAF$, pa je $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} = x$ jer su pravougli trouglovi $\Delta ABD, \Delta ADE, \Delta AEF$ podudarni po pravilu USU. Kako je E podnožje težišnice, to je $\overline{BE} = \overline{EC} = 2x$.

Trougao ΔCEF je pravougli i $\overline{CE} = 2\overline{EF}$ pa je $\measuredangle E = 60^0$, $\measuredangle C = 30^0$. Sada je $\measuredangle DAC = 60^0$, tj. $2\varphi = 60^0$, te $\varphi = 30^0$, tj. $\measuredangle A = 3\varphi = 90^0$, $\measuredangle B = 60^0$.



\# Dat je ugao od 54^0. Kako ćeš samo pomoću šestara i linijara podijeliti taj ugao na tri jednaka dijela? Opiši postupak. (Prenesi ugao od 54^0 sa date slike, ili ga nacrtaj pomoću uglomjera).

Rj. Nacrtajmo ugao od 54^0 i dopunimo ga pomoću šestara i linijara do vrijednosti 60^0. Razlika uglova $60^0 - 54^0 = 6^0$, a $3 \cdot 6^0 = 18^0$, što iznosi $\frac{1}{3}$ od 54^0.

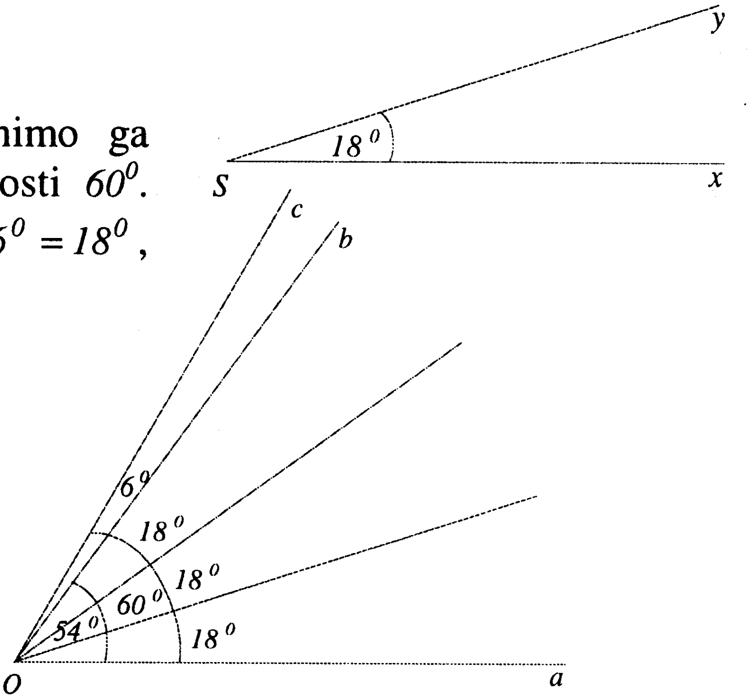
Konstrukcija:

1^0 $\angle aOb = 54^0$;

2^0 $\angle aOc = 60^0$;

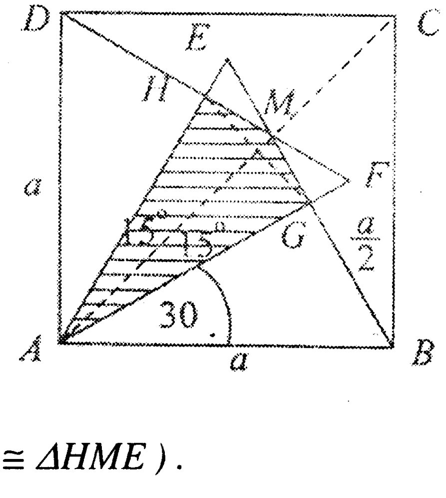
3^0 $\angle bOc = 6^0 = 60^0 - 54^0$;

4^0 $\angle xSy = 3 \cdot 6^0 = 18^0$.



\# Dat je kvadrat $ABCD$ stranice a. Nad dvjema njegovim susjednim stranicama konstruišu se dva jednakostranična trougla u unutrašnjosti kvadrata. Izračunaj površinu zajedničkog dijela tih trouglova.

Rj. Neka je $ABCD$ dati kvadrat a ΔABE i ΔADF jednakostranični trouglovi konstruisani u unutrašnjosti tog kvadrata. Zajednički dio ovih trouglova je četverougao $AGMH$. Očigledno, četverougao $AGMH$ je deltoid. Deltoid se sastoji od dva podudarna pravougla trougla: ΔAGM i ΔAHM. Izračunajmo površinu ΔAGM.



Njegove katete su $\overline{AG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (visina jednakostraničnog trougla) i $\overline{GM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GE} = \frac{1}{4}a$ ($\Delta GMF \cong \Delta HME$).

Dakle,

$$P_{\Delta AGM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{16}a^2\sqrt{3},$$

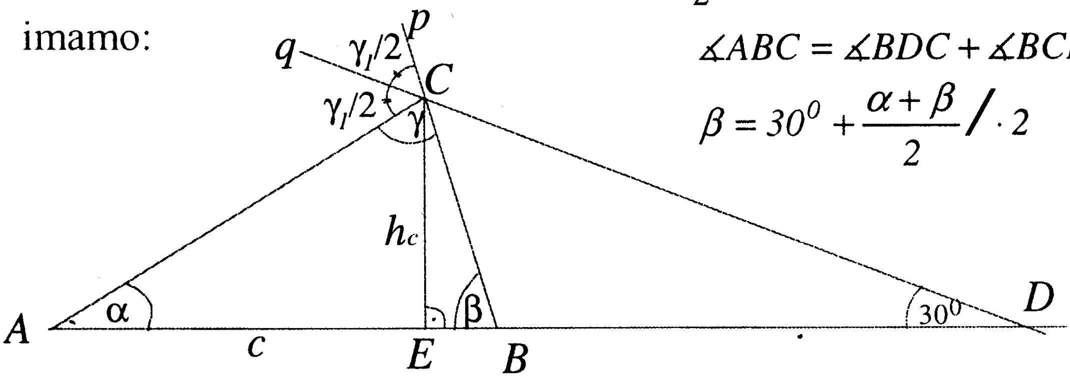
pa je površina deltoida $AGMH$ jednaka $P = 2 \cdot \frac{1}{16}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$.

#) Nacrtaj trougao $\Delta ABC, (\beta > \alpha)$ i visinu h_c na stranicu c. Tačku u kojoj visina siječe stranicu c označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu AB označi da D. Ako je $\frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{CE}$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj. Iz $\frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{CE}$ slijedi $\overline{CD} = 2\overline{CE}$, pa je pravougli trougao ΔCED polovina jednakostraničnog trougla stranice $\overline{CD}$, tj. $\overline{CD} = 2h_c$, te $\measuredangle EDC = 30^0$.

Sada je
$$\measuredangle\ pCq = \frac{1}{2}\gamma_1 = \frac{1}{2}(180^0 - \gamma) = 90^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \alpha - \beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Imamo da je ugao $\measuredangle BCD = \measuredangle pCq = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Po teoremi o vanjskom uglu trougla imamo:

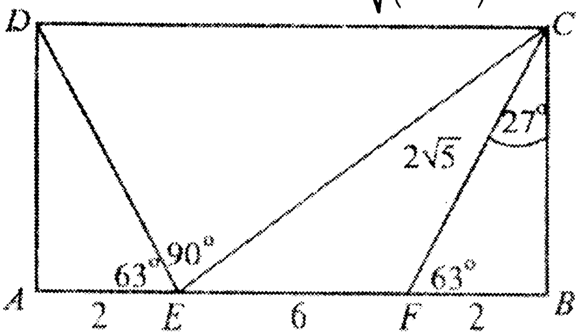


$\measuredangle ABC = \measuredangle BDC + \measuredangle BCD$, tj.

$$\beta = 30^0 + \frac{\alpha + \beta}{2} \Big/ \cdot 2 \quad \Rightarrow 2\beta = 60^0 + \alpha + \beta$$
$$\Rightarrow \alpha - \beta = -60^0, \text{ tj.}$$
$$\beta - \alpha = 60^0.$$

#) Na stranici AB datog pravougaonika $ABCD$ istaknute su tačke E i F, tako da je $\overline{AE} = \overline{BF} = 2, \overline{EF} = 6, \overline{FC} = 2\sqrt{5}, \measuredangle BFC = 27^0$. Odrediti uglove $\measuredangle ECF$ i $\measuredangle CEF$.

Rj. Iz pravouglog trougla ΔBCF nalazimo: $\measuredangle BFC = 63^0$ i primjenom Pitagorine teoreme: $\overline{BC} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 4$. Dalje, primjenom iste teoreme na



pravougli trougao ΔBCE dobijamo

$$\overline{CE} = \sqrt{(6+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

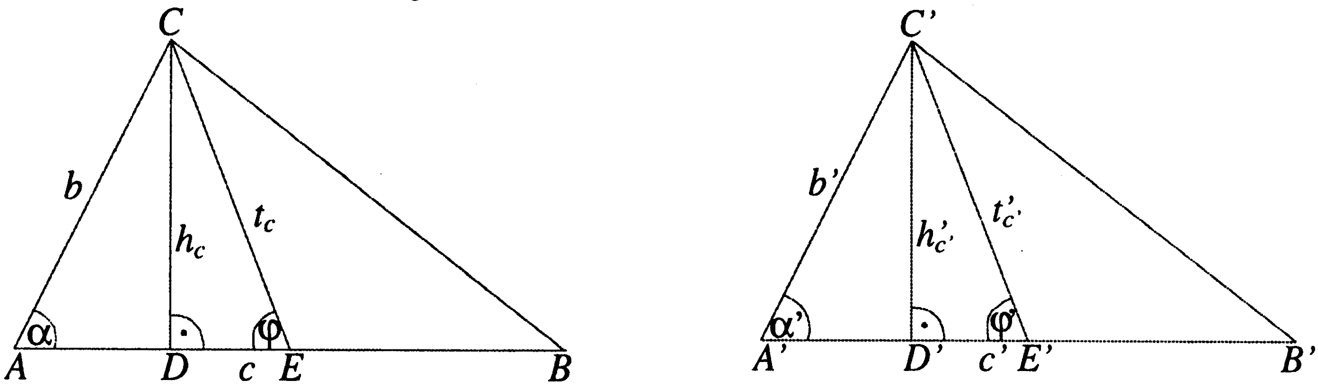
Jednostavno se zaključuje da je $\Delta AED \cong \Delta BFC$, pa trougao ΔCDE ima stranice dužina:

$\overline{DE} = 2\sqrt{5}, \overline{CE} = 4\sqrt{5}, \overline{CD} = 10$ i tačna je jednakost $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$, tj. $10^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2$, na osnovu teoreme obrnute Pitagorinoj teoremi zaključujemo da je ΔCDE pravougli i da je $\measuredangle CED = 90^0$. Sada nalazimo tražene uglove: $\measuredangle CEF = 180^0 - 63^0 - 90^0 = 27^0$ i $\measuredangle ECF = 63^0 - 27^0 = 36^0$.

#

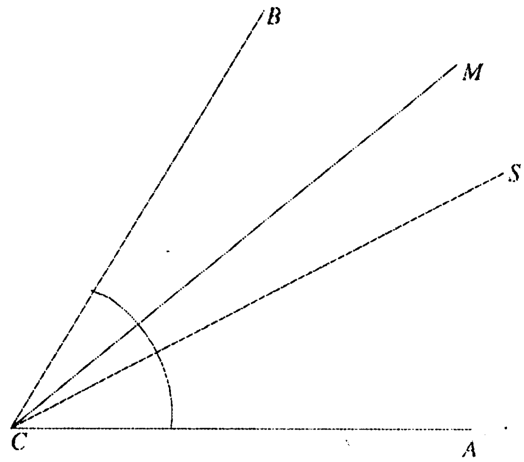
Dokazati da su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c', h_c=h_{c'}, t_c=t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$.

Rj. Kako je $h_c=h_{c'}, t_c=t_{c'}$, $\measuredangle D=\measuredangle D'=90^0$ to je $\Delta CDE\cong\Delta C'D'E'$ (stav SSU), pa je $\measuredangle DEC=D'E'C'$, tj. $\varphi=\varphi'$. Kako je $c=c'$, to je i $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$, pa je zbog $\overline{AE}=\overline{A'E'}$ (tj. $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$), $\measuredangle AEC=\measuredangle A'E'C'$ ($\varphi=\varphi'$), $\overline{EC}=\overline{E'C'}$ također $\Delta AEC\cong\Delta A'E'C'$ (stav SUS), pa je zbog toga i $b=b'$ te $\alpha=\alpha'$. Sada iz $b=b', \alpha=\alpha', c=c'$, slijedi $\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$ (stav SUS), što je i trebalo dokazati.



#

Zadani su ugao $\measuredangle ACB$ (C je njegov vrh, a tačke A i B su na njegovim kracima), poluprava CM unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava CS koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM=\frac{1}{2}(\measuredangle MCA-\measuredangle MCB)$.



Rj. Iz slike očigledno vrijede ove jednakosti:

$$\measuredangle MCA=\measuredangle SCA+\measuredangle SCM \qquad (1)$$

$$\measuredangle MCB=\measuredangle SCB-\measuredangle SCM,$$

a zbog $\measuredangle SCB=\measuredangle SCA$ je

$$\measuredangle MCB=\measuredangle SCA-\measuredangle SCM. \qquad (2)$$

Ako oduzmemo (2) od (1), dobijamo: $\measuredangle MCA-\measuredangle MCB=$
$=\measuredangle SCA+\measuredangle SCM-(\measuredangle SCA-\measuredangle SCM)=2\measuredangle SCM$

ili $\measuredangle SCM=\frac{1}{2}(\measuredangle MCA-\measuredangle MCB)$.

#

Magični kvadrat reda 3×3 je takav kvadrat kod kojeg se sabiranjem po tri broja u svim pravcima (horizontalno, vertikalno i na obje dijagonale) dobija uvijek isti broj. Popuniti prazna polja u kvadratu, pa da on bude magičan kvadrat.

	21	14
		19
20		

Rj. Neka je centralni broj jednak x (sl. 1.). Tada je karakteristični zbir magičnog kvadrata jednak $20+x+14=34+x$ (dijagonala). Izračunavanjem preostalih brojeva i upoređivanjem sa karakterističnim zbirom dobija se jednačina $x-1+x+x+1=34+x$ ili $2x=34$, pa je $x=17$. Rješenje je prikazano na slici 2.

x-1	21	14
	x	19
20		$x+1$

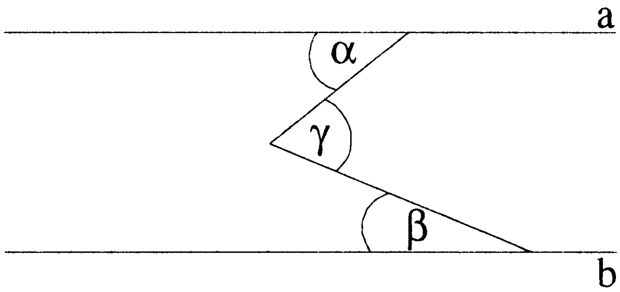
sl.1

16	21	14
15	17	19
20	13	18

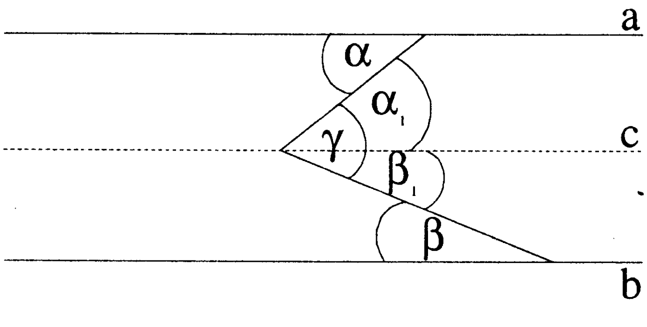
sl.2

#

Dati su uglovi $\alpha=42^0 54'$ i $\beta=35^0 37'$. Izračunati ugao γ ako su prave a i b paralelne (vidi sliku).



Rj. Povucimo kroz vrh ugla γ pravu c tako da je $c\|a\|b$. Očigledno je $\gamma=\alpha_1+\beta_1$. Kako je $\alpha=\alpha_1$ i $\beta=\beta_1$ (kao uglovi sa paralelnim kracima), to je $\gamma=\alpha_1+\beta_1=$
$=\alpha+\beta=42^0 54'+35^0 37'=77^0 91'=78^0 31'$.



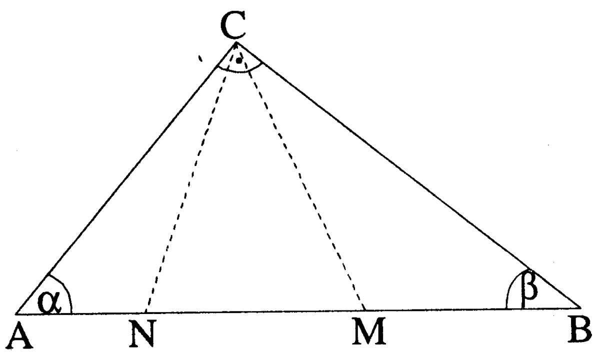
\# Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2cm, h_b = 4cm, h_c = 6cm$?

Rj. Pretpostavimo da postoji trougao čije su stranice dužina a, b i c, a odgovarajuće visine imaju dužine $h_a = 2cm, h_b = 4cm, h_c = 6cm$. Tada je $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, a odavde je $a = 2b = 3c$, pa su stranice trougla $a, \frac{a}{2}$ i $\frac{a}{3}$. Međutim, znamo da zbir dvije stranice mora biti veći od treće stranice, pa kako je $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5a}{6} < a$, zaključujemo da ovakav trougao ne postoji.

\# Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ΔABC date su tačke M i N tako da je $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

Rj. Zbog $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$ slijedi da su trouglovi ΔACM i ΔBCN jednakokraki, tj. $\measuredangle AMC = \measuredangle ACM = \frac{1}{2}(180^0 - \alpha) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, te slično

$$\measuredangle BCN = \measuredangle BNC = \frac{1}{2}(180^0 - \beta) = 90^0 - \frac{\beta}{2}.$$



Dakle,

$$\measuredangle MCN = 180^0 - (\measuredangle MNC + \measuredangle NMC) =$$

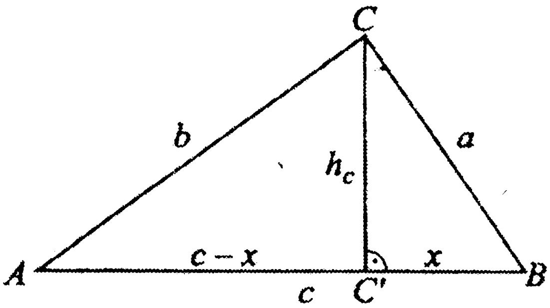
$$= 180^0 - \left(90^0 - \frac{\alpha}{2} + 90^0 - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 90^0 = 45^0.$$

\# Dužine stranica trougla ΔABC su $a = 13cm, b = 14cm, c = 15cm$. Kolike su dužine njegovih visina?

Rj. Neka je ΔABC trougao čije su dužine stranica $a = 13cm, b = 14cm, c = 15cm$ i neka je $h_c = CC'$ dužina njegove visine iz vrha C.

I način: Neka je $\overline{C'B} = x$, tada je $\overline{AC'} = c - x$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove $\Delta AC'C$ i $\Delta BC'C$ nalazimo: $h_c^2 = b^2 - (c-x)^2, h_c^2 = a^2 - x^2$; $b^2 - (c-x)^2 = a^2 - x^2$, pa je



$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c},$$

odnosno

$$x = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 15} cm = \frac{33}{5} cm.$$

Dužina visine h_c je $\quad h_c = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{169 - \left(\frac{33}{5}\right)^2} cm = \sqrt{\frac{3136}{25}} cm = \frac{56}{5} cm.$

Površina trougla je $\quad P = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{56}{5} cm^2 = 84 cm^2.$

Dužine drugih dviju visina jednostavno nalazimo:

$$h_a = \frac{2P}{a} = \frac{2 \cdot 84}{13} cm = \frac{168}{13} cm, \; h_b = \frac{2P}{b} = \frac{2 \cdot 84}{14} cm = 12 cm.$$

II način: Izračunajmo površinu trougla koristeći Heronov obrazac $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla.

Dakle, $s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$, pa je

$$P = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} cm^2 =$$
$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 cm^2} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 cm^2}$$
$$= \sqrt{3^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2 cm^2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 cm^2 = 84 cm^2.$$

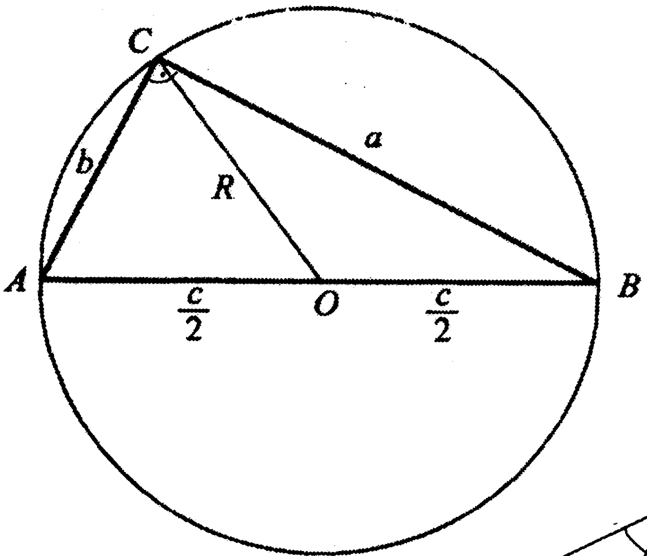
Dužine visina nalazimo jednostavno:

$$h_a = \frac{2P}{a} = \frac{168}{13} cm, \; h_b = \frac{2P}{b} = \frac{168}{14} cm$$
$$= 12 cm, \; h_c = \frac{2P}{c} = \frac{168}{15} = \frac{56}{5} cm.$$

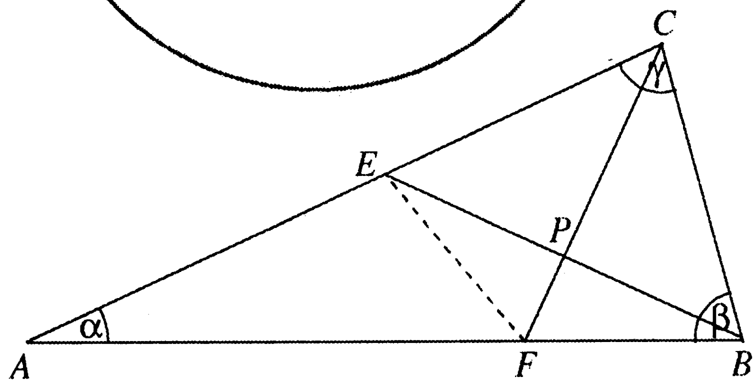
#. Dokazati da za pravougli trougao vrijedi nejednakost $R \geq \sqrt{P}$, gdje je R poluprečnik opisanog kruga tog trougla, a P njegova površina.

R. Neka je ΔABC pravougli trougao s pravim uglom kod tjemena C; $\overline{OC} = R$ je poluprečnik opisanog kruga oko tog trougla. Na osnovu Pitagorine teoreme je $c^2 = a^2 + b^2$, a kako je $R = \frac{c}{2}$, to je $c = 2R$.

Iskoristimo sljedeću nejednakost $(a-b)^2 \geq 0$, odnosno $a^2 + b^2 \geq 2ab$, gdje znak jednakosti važi ako i samo ako je $a = b$.



Sada imamo $(2R)^2 = c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, a odavde je $R^2 \geq \frac{ab}{2}$, odnosno, $R \geq \sqrt{\frac{ab}{2}} = \sqrt{P}$, jer je površina trougla upravo jednaka $P = \frac{ab}{2}$. Za $a = b$ trougao je jednakokrako-pravougli i tada važi znak jednakosti u dokazanoj nejednakosti.



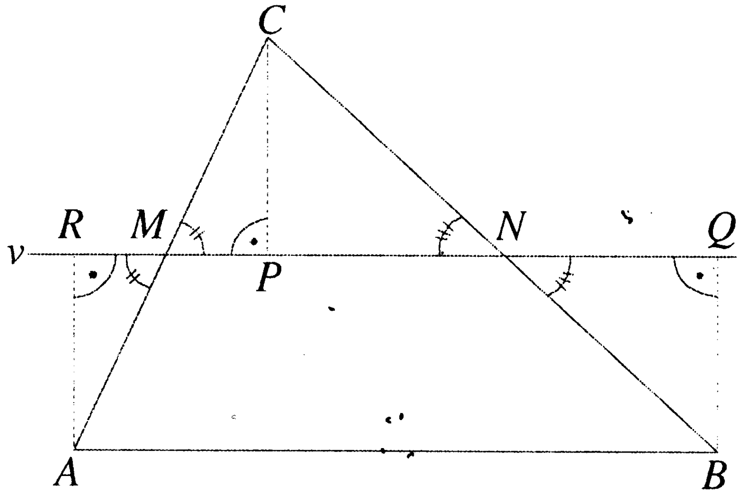
#. U trouglu ΔABC je ugao $\beta = 75^0$ i ugao $\gamma = 80^0$. Uzete su tačke $E \in AC$ i $F \in AB$ tako da je ugao $\measuredangle FBE = 25^0$ i ugao $\measuredangle FCB = 40^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AEF$.

R. Neka je $\{P\} = BE \cap CF$. Pošto je $\gamma = \measuredangle ACB = 80^0$, $\beta = \measuredangle ABC = 75^0, \measuredangle FBE = 25^0$, to je $\measuredangle EBC = 75^0 - 25^0 = 50^0$, pa je zbog $\gamma = 80^0$ također $\measuredangle BEC = 50^0$, tj. ΔEBC je jednakokraki, a zbog $\measuredangle FCB = 40^0$ je CF simetrala stranice BE. Dakle, imamo: $\overline{BC} = \overline{EC}$ i $\overline{BP} = \overline{PE}$.

CP je visina trougla ΔBEC pa je i $\measuredangle EPF = \measuredangle BPF = 90^0$, znači $\Delta FPB \cong \Delta FPE$ (SUS), to je: $\measuredangle FEP = \measuredangle FBP = 25^0$. Sada je $\measuredangle AEF = 180^0 - (50^0 + 25^0) = 105^0$.

\# Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A,B,C datog trougla. Dati dokaz konstrukcije. Koliko takvih pravih postoji?

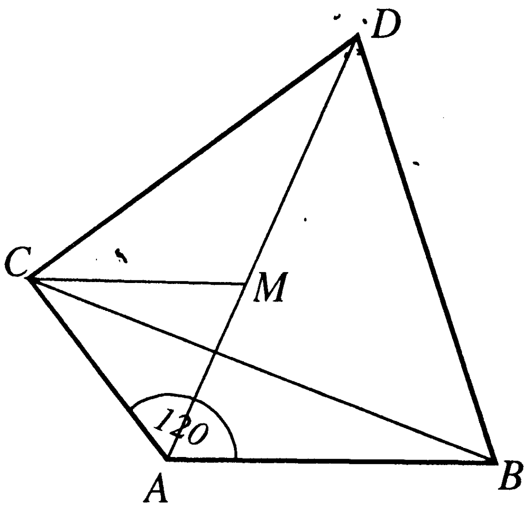
R. Konstruišimo pravu p koja sadrži duž MN, a duž MN je srednja linija ΔABC (M je središte stranice AC, a N središte stranice BC trougla ΔABC). Kako je $MN \| AB$ (i $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$), to imamo da je $\Delta AMR \cong \Delta MCP$ ($\overline{AM} = \overline{CM}$, $\measuredangle AMR = \measuredangle PMC$ (unakrsni), $\measuredangle ARM = \measuredangle CPM = 90^0$) te $\Delta CPN \cong \Delta BNQ$ ($\overline{BN} = \overline{CN}$, $\measuredangle CNP = \measuredangle BNQ$ (unakrsni), $\measuredangle CPN = \measuredangle BQN = 90^0$), a iz tih podudarnih trouglova slijedi da je $\overline{AR} = \overline{CP} = \overline{BQ}$.



Očigledno, postoje još dvije tražene prave koje sadrže ostale dvije srednje linije trougla ΔABC.

\# Dat je trougao ΔABC u kome je ugao $\measuredangle BAC = 120^0$. Na simetrali ugla $\measuredangle BAC$ data je tačka D tako da je $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Dokazati da je trougao ΔBCD jednakostranični.

R. Na simetrali AD izaberimo tačku M tako da je $\overline{AM} = \overline{AC}$. Pošto je $\measuredangle CAM = 60^0$, to je trougao ΔACM jednakostraničan.
Sada je $\measuredangle CMD = 180^0 - \measuredangle AMC = 180^0 - 60^0 = 120^0$. Pošto je po uslovu zadatka $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ te $\overline{AM} = \overline{AC}$, to je $\overline{MD} = \overline{AD} - \overline{AM} = \overline{AD} - \overline{AC} = \overline{AB}$.



Sada su trouglovi ΔABC i ΔMDC podudarni jer je $\measuredangle CAB = \measuredangle CMD = 120^0$, $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BC} = \overline{CD}$ i $\measuredangle ACB = \measuredangle MCD$. Iz te podudarnosti slijedi da je $\overline{BC} = \overline{CD}$ i $\measuredangle ACB = \measuredangle MCD$. Tada je i $\measuredangle ACM = \measuredangle ACB + \measuredangle BCM = \measuredangle MCD + \measuredangle BCM = \measuredangle BCD = 60^0$.
Kako je $\measuredangle BCD = 60^0$ i $\overline{BC} = \overline{CD}$, to je trougao ΔBCD, jednakostraničan, q.e.d.

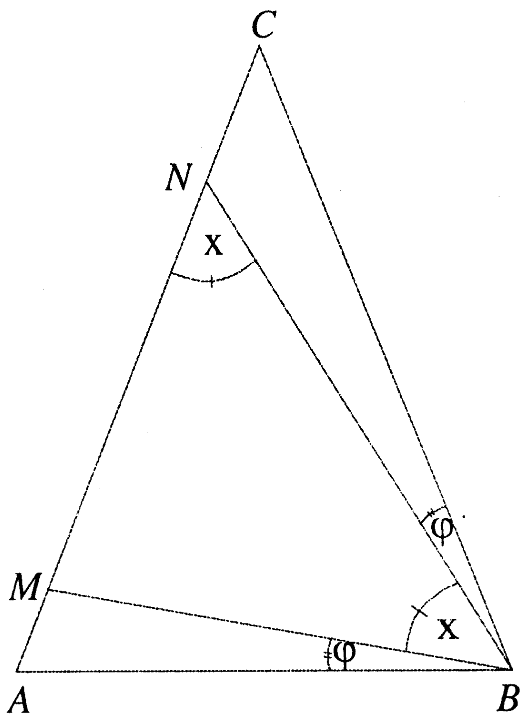
\# Kvadrat je podijeljen na devet jednakih manjih kvadrata. Je li moguće u ove male kvadrate upisati brojeve $1,2$ i 3 tako da u svim kolonama, vrstama i dijagonalama sume brojeva budu različite? Odgovor obrazložiti!

R.j. Ukupan broj kolona, vrsta i dijagonala je $3+3+2=8$. Dakle, morali bismo formirati osam različitih suma tako da svaka ima tačno tri sabirka (neke od brojeva $1,2$ ili 3) i da te sume međusobno budu različite. Međutim, najmanja suma je $1+1+1=3$, a najveća $3+3+3=9$. Dakle, vrijednosti suma su iz skupa $A=\{3,4,\dots,9\}$. Pošto ovaj skup ima sedam elemenata, to ako ih razvrstamo u osam grupa, dvije grupe će imati iste sume. Odgovor je dakle negativan.

\# Dat je jednakokraki trougao ΔABC $(\overline{AC}=\overline{BC})$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM=\measuredangle CBN$ i $\overline{MN}=\overline{MB}$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

R.j. Prema uslovu zadatka je $\measuredangle ABM=\measuredangle CBN=\varphi$. Kako je $\overline{MB}=\overline{MN}$, to je ΔBNM jednakokraki, pa su uglovi na osnovici BN jednaki i iznose, npr. po x. Ugao $\measuredangle ANB$ je spoljašnji ugao ΔBNC, pa je jednak zbiru dva nesusjedna unutrašnja ugla tog trougla. Odavdje slijedi da je $\measuredangle ACB=x-\varphi$. Kako je ΔABC jednakokraki $(\overline{AC}=\overline{BC})$, to su uglovi na osnovici AB jednaki, pa je $\measuredangle BAC=2\varphi+x$.

Sada je $2(2\varphi+x)+x-\varphi=180^0$, tj. $3\varphi+3x=180^0$, odnosno $\varphi+x=60^0$, tj. $\measuredangle ABN=\varphi+x=60^0$.

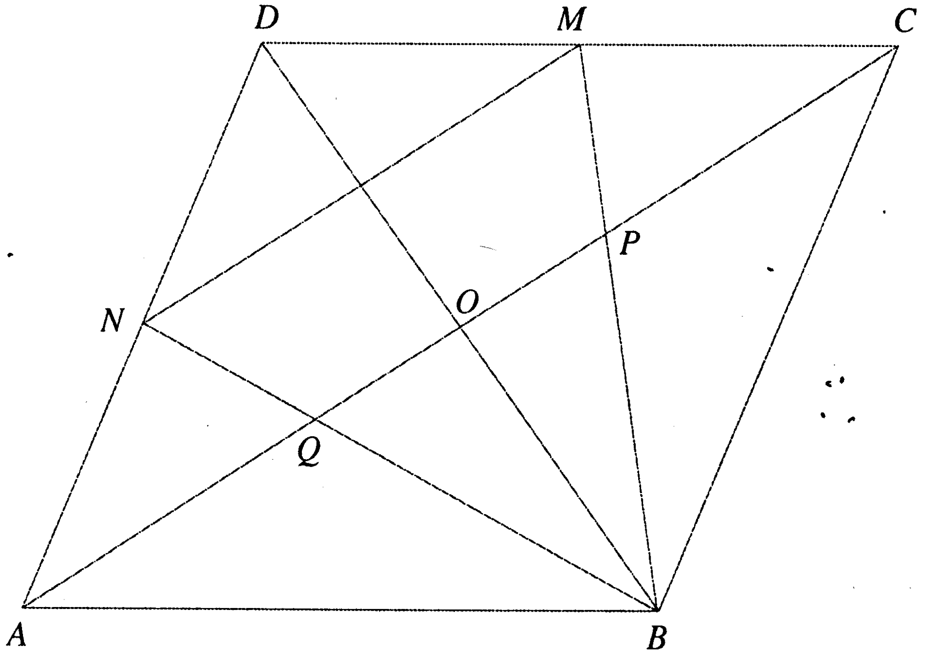


#) Dijagonala AC romba $ABCD$ ima dužinu $6cm$. Neka je M središte stranice CD i N središte stranice AD. Duži BN i BM sijeku dijagonalu AC u tačkama P i Q.

a) Izračunati dužinu odsječka PQ;

b) Izračunati površinu trougla ΔBMN ako je $\overline{BM} = 3cm$.

R.: a) Neka je dužina dijagonale AC romba $ABCD$ jednaka $6cm$ i neka je druga dijagonala BD siječe u tački O. Dijagonale romba se polove, pa su BM i CO težišne duži trougla ΔBCD, a tačka P je njegovo težište. Dakle, $\overline{CP} = 2\overline{PO}$. Analogno, posmatranjem trougla ΔABD zaključujemo da je $\overline{AQ} = 2\overline{OQ}$. Na osnovu $\overline{CP} = 2 \cdot \overline{PO}$ i $\overline{AQ} = 2\overline{OQ}$, zaključujemo da je $\overline{AQ} = \overline{QP} = \overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{AC} = 2cm$, tj. $\overline{PQ} = 2cm$.



b) Posmatrajmo ΔBDM i ΔBDN. Stranica BD je zajednička, dakle, $\overline{BD} = \overline{BD}$, $\overline{DM} = \overline{DN}$ i $\angle MDB = \angle NDB$ jer dijagonale romba su ujedno i simetrale unutrašnjih uglova romba. Dakle, $\Delta BDM \cong \Delta BDN$, pa je $\overline{BN} = \overline{BM} = 3cm$. Kako je duž MN srednja linija trougla ΔACD, to je $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 3cm$. Sada zaključujemo da je trougao ΔBMN jednakostraničan i njegova površina je

$$P = \frac{1}{4}\overline{MN}^2\sqrt{3}, \text{ tj. } \quad P = \frac{1}{4} \cdot 3^2\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4} cm^2.$$

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) U oštrouglom trouglu $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od 9°, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od 61°. Odrediti uglove $\triangle ABC$.

b) Data je prava a. Konstruisati pravu p koja prolazi kroz datu tačku M koja ne pripada pravoj a, i koja siječe datu pravu a pod uglom od 20°. (Ugao od 20° konstruisti približno tačno.)

c) U $\triangle ABC$ je upisan krug $k(I, r)$. Centar opisanog kruga $k''(M, r'')$ oko $\triangle BCI$ nalazi se na presjeku $pp[A, I]$ i kruga $k'(S, r')$ koji je opisan oko $\triangle ABC$. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C, M)$ gdje je M centar kruga k''.

d) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

e) Pravougaonik je podijeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Zadatak br. 2

Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Zadatak br. 3

Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F) = F$.

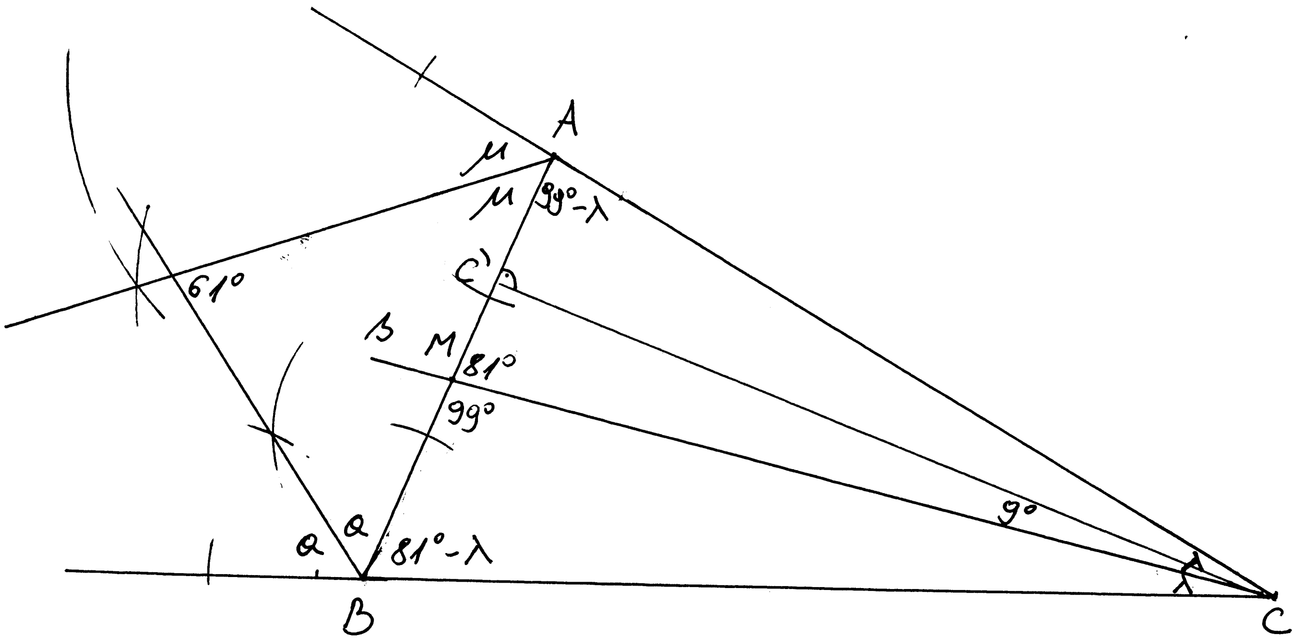
Zadatak br. 4

Ako sva tri tjemena trougla $\triangle A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti $\triangle ABC$, tada je obim $\triangle A_1B_1C_1$ manji od obima trougla $\triangle ABC$. Dokazati.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

U oštrouglom trouglu ΔABC $(AC < BC)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = p(C, M)$ ugla γ zaklapaju ugao od $9°$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena A i B sijeku se pod uglom od $61°$. Odrediti uglove ΔABC.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

$\Delta CMC'$ pravougli $\Rightarrow$ $\measuredangle CMC' = 81°$; $\measuredangle BMC = 99°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 99° - \lambda$; $\beta = 81° - \lambda$

$$\left.\begin{aligned} 2\mu + 99° - \lambda = 180° &\Rightarrow 2\mu = 81° + \lambda \\ 2\theta + 81° - \lambda = 180° &\Rightarrow 2\theta = 99° + \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\mu + 2\theta = 180° + 2\lambda \quad \dots (*)$$

$\theta + \mu + 61° = 180° \quad / \cdot 2$

$2\theta + 2\mu + 122° = 360°$

$2\theta + 2\mu = 238° \quad \dots (**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$

$180° + 2\lambda = 238°$

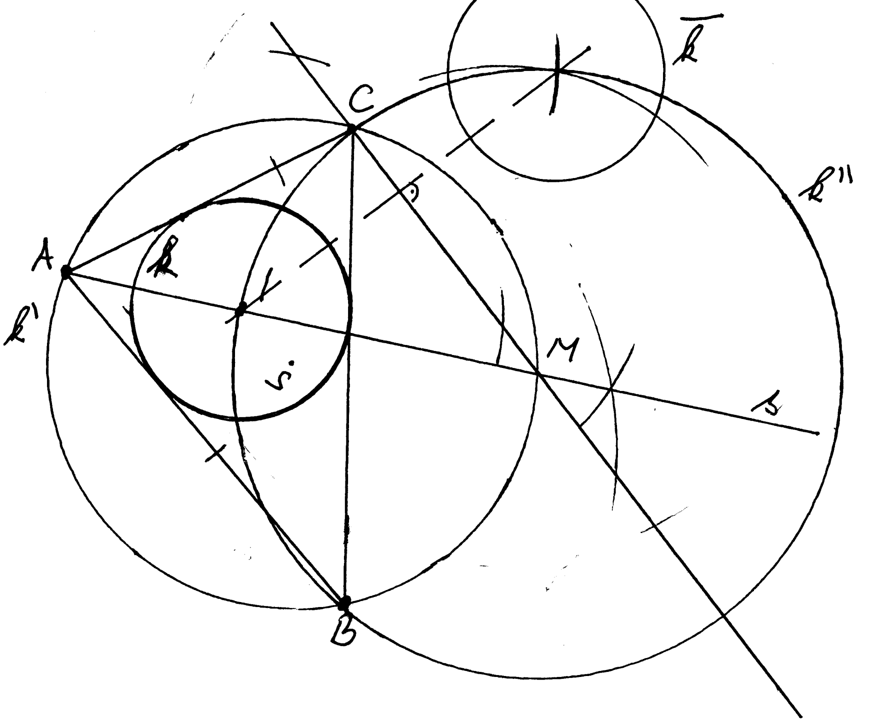
$2\lambda = 58°$

$\lambda = 29°$

$\Rightarrow$ $\alpha = 70°$, $\beta = 52°$; $\gamma = 58°$

(#) U ΔABC je upisan krug k sa centrom u I. Centar opisanog kruga k'' oko ΔBCI nalazi se na presjeku $p[A,I)$ i kruga k' koj je opisana oko ΔABC. Spomenute krugove i trouglove nacrtati na proizvoljan način. Nakon toga krug k preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj $p(C,M)$ gdje je M centar kruga k''.

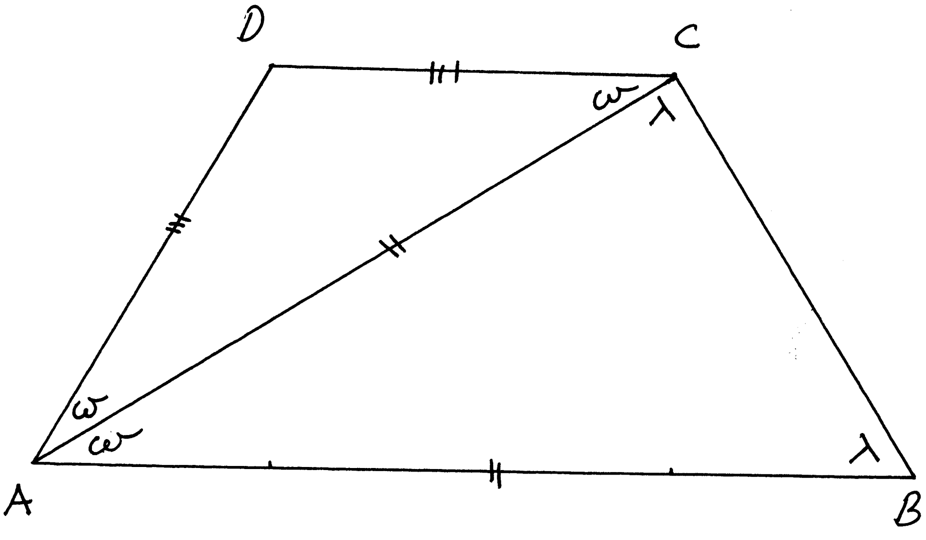
Rj. Prvo ćemo nacrtati $k'(S,r')$, pa ćemo nacrtati ΔABC, pa simetralu s ugla $\measuredangle BAC$, krug $k''(M,r'')$ i na kraju $k(I,r)$



$$G_{p(M,C)}(k) = \bar{k}$$

(#) Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

R:



jkk trapez $\square ABCD$ ima podudarne stranice AD i BC, kao i uglove $\measuredangle DAB \cong \measuredangle ABC$ i $\measuredangle ADC \cong \measuredangle BCD$.

AB je najveća stranica

Kako dijagonala razbija trapez na dva jkk trougla to $\triangle ABC$ jkk sa $AB \cong AC$ i $\triangle ADC$ jkk sa $AD \cong DC$

$\Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle ABC = \lambda$ i $\measuredangle DAC \cong \measuredangle DCA \cong \omega$

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB = \omega$

Sad imamo
$$2\omega = \lambda$$
$$\underline{2\lambda + \omega = 180^\circ \quad /\cdot 2}$$

$$4\lambda + 2\omega = 360^\circ$$
$$5\lambda = 360^\circ$$
$$\lambda = 72^\circ \Rightarrow \omega = 36^\circ$$

$\Rightarrow \measuredangle A = 72^\circ, \quad \measuredangle B = 72^\circ, \quad \measuredangle C = 108^\circ, \quad \measuredangle D = 108^\circ$

Pravougaonik je podijeljen na 9 manjih pravougaonika. Površine pet od njih su 5, 3, 9, 2 i 2 cm^2 (vidi sliku). Odrediti površinu pravougaonika.

5	3	2
	9	
		2

Rj. Označimo stranice manjih pravougaonika sa a, b, c, d, e i f kao na slici

	a	b	c
d	5	3	2
e	15	9	6
f	5	3	2

Površine tri pravougaonika su dovoljna da odrede površinu četvrtog.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot d = 5 \\ b\cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b} \\ e\cdot b = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a\cdot d = 5 \\ a\cdot\frac{3}{b} = 5 \\ 3a = 5b \\ a = \frac{5}{3}b \end{array}$$

$$e\cdot a = e\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}eb = 5\cdot 3 = 15$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{b} \\ b\cdot e = 9 \\ c\cdot d = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c\cdot d = 2 \\ c\cdot\frac{3}{b} = 2 \\ 3c = 2b \\ c = \frac{2}{3}b \end{array}$$

$$e\cdot c = e\cdot\frac{2}{3}b = \frac{2}{3}eb = \frac{2}{3}\cdot 9 = 6$$

$$\left.\begin{array}{l} e\cdot b = 9 \Rightarrow e = \frac{9}{b} \\ e\cdot c = 6 \\ f\cdot c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} e\cdot c = 6 \\ \frac{9}{b}\cdot c = 6 \\ 9c = 6b \quad /:3 \end{array}$$

$$2b = 3c$$
$$b = \frac{3}{2}c$$

$$f\cdot b = f\cdot\frac{3}{2}c = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot e = 15 \Rightarrow e = \frac{15}{a} \\ e\cdot b = 9 \\ f\cdot b = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e\cdot b = 9 \\ \frac{15}{a}\cdot b = 9 \\ 15b = 9a \quad /:3 \end{array}$$

$$3a = 5b$$
$$a = \frac{5}{3}b$$

$$f\cdot a = f\cdot\frac{5}{3}b = \frac{5}{3}\cdot 3 = 5$$

$$10 + 30 + 10$$

Površina pravougaonika je 50 cm^2.

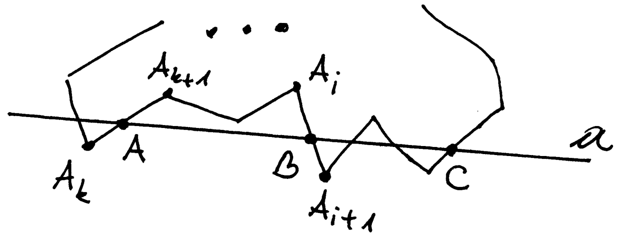
(#) Dokazati da konveksan mnogougao i prava koja ne sadrži nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

R: postavka zadatka

$A_1A_2A_3\ldots A_n$ mnogougao, prava a } $\Rightarrow$ prava a i mnogougao mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke.

Neka je dat konveksan mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ $n\geq 6$ i prava a koja ne sadrži ni jednu njegovu stranicu.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da prava a i mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ imaju najmanje tri zajedničke tačke A, B i C, i pretpostavimo da je poredak na pravoj a $A-B-C$ (druga dva moguća poretka su $A-C-B$ i $B-A-C$).



Pokazaćemo da ako imamo ovaj slučaj mnogougao nije konveksan i doći do željene kontradikcije

Mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ konveksan $\Rightarrow$ $AB, BC, AC \subseteq$ unutar mnogougla

Pretpostavimo da tačka $B\in A_iA_{i+1}$.

Znamo da ako je mnogougao konveksan tada se svi vrhovi mnogougla nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu tog mnogougla.

Prema toj tvrdnji svi vrhovi mnogougla se nalaze sa jedne strane prave $p(A_i, A_{i+1})$ $\Rightarrow$ ne mogu istovremeno i tačka A i tačka C pripadati mnogouglu $\Rightarrow$

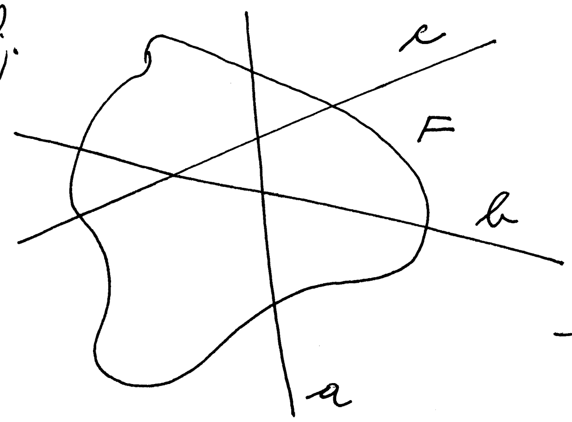
$\Rightarrow$ mnogougao $A_1A_2\ldots A_n$ nije konveksan #kontradikcija (prema pretpostavci mnogougao je konveksan)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome konveksan mnogougao i prava koja ne sadrže nijednu njegovu stranicu mogu da imaju najviše dvije zajedničke tačke q.e.d.

(#) Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F)=F$.

Rj.



postavka zadatka:

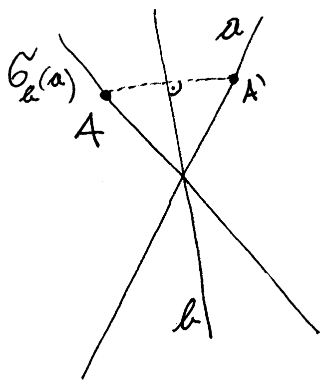
$$\left.\begin{array}{l}\sigma_a(F)=F\\ \sigma_b(F)=F\\ \sigma_b(a)=c\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_c(F)=F.$$

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti $\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.

(Zašto smo uzeli ovu transformaciju podudarnosti u razmatranje?) (želimo pokazati da je $\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$).

Uzmimo proizvoljnu tačku A prave $\sigma_b(a)$.

$$\gamma(A)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(A)))\overset{b\ \text{sim}\ AA'}{=\!=}\sigma_b(\sigma_a(A'))\overset{A'\in a}{=\!=}\sigma_b(A')\overset{b\ \text{sim}\ AA'}{=\!=}A$$



A je fiksna tačka transformacije γ.

Kako je A proizvoljna tačka to su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke transformacije podud. γ.

Kako je još $\gamma\circ\gamma=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b\circ\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b=id$ to je γ involutivna transform. podudarnosti pa γ može biti

- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija

γ nije identitet ni centralna simetrija (ZAŠTO?). Prema tome γ je osna simetrija, pa kako su sve tačke prave $\sigma_b(a)$ fiksne tačke $\gamma=\sigma_{\sigma_b(a)}=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b$.

Sad imamo

$$\sigma_c(F)=\sigma_{\sigma_b(a)}(F)=\sigma_b\circ\sigma_a\circ\sigma_b(F)=\sigma_b(\sigma_a(\sigma_b(F)))=\sigma_b(\sigma_a(F))=\sigma_b(F)$$
$$=F \text{ q.e.d.}$$

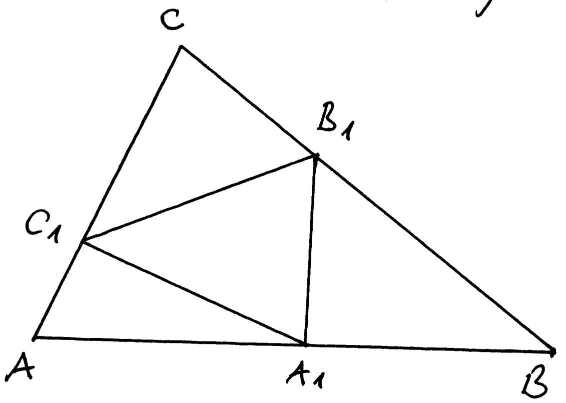
(#) Ako sva tri tjemena trougla $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC, tada je obim $\Delta A_1B_1C_1$ manji od obima trougla ΔABC. Dokazati.

Rj: postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \\ A_1, B_1, C_1 \in \text{unutrašnjosti } \Delta ABC \end{array}\right\} \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}.$$

Prije nego što počnemo rješavati naš zadatak razmotrimo dva specijalna slučaja ovog zadatka:

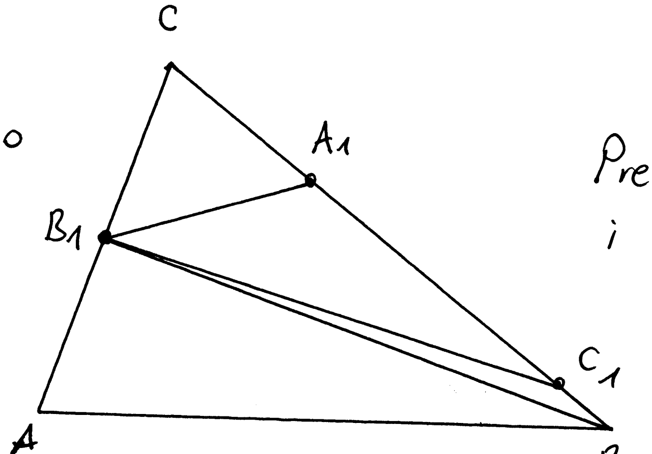
1°



Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ leže na stranicama trougla i to $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$ i $C_1 \in AC$. Posmatrajmo ΔA_1BB_1, ΔC_1B_1C i ΔAA_1C. Imamo

$$\begin{array}{rl} A_1B_1 & < A_1B + BB_1 \\ B_1C_1 & < CC_1 + CB_1 \\ + \quad A_1C_1 & < AA_1 + AC_1 \\ \hline O_{\Delta A_1B_1C_1} & < O_{\Delta ABC} \end{array}$$

2°



Pretpostavimo da $A_1, C_1 \in BC$ i $B_1 \in AC$ i pokažimo da $O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$.

$$\begin{array}{rl} A_1B & = A_1B \\ A_1B_1 & < B_1C + CA_1 \\ + \quad B_1B & < AB_1 + AB \\ \hline O_{\Delta A_1B_1B} & < O_{\Delta ABC} \quad \ldots(1) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} B_1C_1 & < B_1B + BC_1 \\ B_1A_1 & = B_1A_1 \\ + \quad A_1C_1 & = A_1C_1 \\ \hline O_{\Delta A_1B_1C_1} & < O_{\Delta B_1BA_1} \quad \ldots(2) \end{array}$$

(1) i (2) $\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta ABC}$

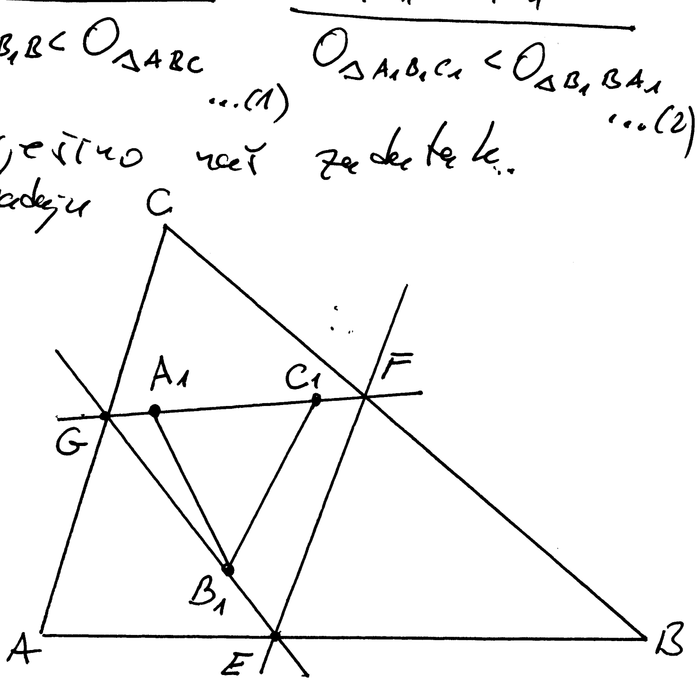
Na osnovu ova dva slučaja rješimo naš zadatak.

Pretpostavimo da tjemena $\Delta A_1B_1C_1$ pripadaju unutrašnjosti ΔABC

$p(A_1, C_1) \cap BC = \{F\}$

$p(A_1, C_1) \cap AC = \{G\}$

$p(G, B_1) \cap AB = \{E\}$



$$\left.\begin{array}{l} 1° \Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG} \\ 2° \Rightarrow O_{\Delta EFG} < O_{\Delta ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_{\Delta A_1B_1C_1} < O_{\Delta EFG} \text{ q.e.d.}$$

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ paralelogram akko mu se dijagonale polove.

b) Površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ se računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

c) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

d) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

e) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Zadatak br. 2

Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Zadatak br. 3

Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.
(Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup pravih koje prolaze kroz istu tačku.)

Zadatak br. 4

Neka je AB najmanja stranica trougla $\triangle ABC$ i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla. Dokazati da je $MA + MB + MC < AC + BC$.

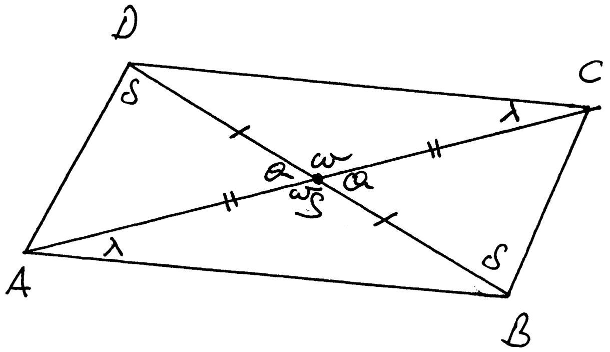
(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Paralelogram je četverougao koji ima dva para paralelnih stranica. Dokazati da je četverougao $\square ABCD$ paralelogram akko mu se dijagonale polove.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\square ABCD$ četverougao u kome se dijagonale polove $\Rightarrow$ $\square ABCD$ je paralelogram

---



$AC \cap BD = \{S\}$

S je sredina AC i BD

Posmatrajmo $\triangle ABS$ i $\triangle CDS$

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle BSA \cong \measuredangle CSA = \omega \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASB \cong \triangle CSD$$

unakrsni uglovi

$\Downarrow$

$\measuredangle BAC \cong \measuredangle ACD = \lambda$

$\Rightarrow p(A,B) \parallel p(C,D)$

Posmatrajmo $\triangle ASD$ i $\triangle BSC$

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong CS \\ \measuredangle ASD \cong \measuredangle BSC = \alpha \\ BS \cong DS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle ASD \cong \triangle BSC$$

unakrsni uglovi

$\Downarrow$

$\measuredangle ADS \cong \measuredangle CBS = \delta$

$\Downarrow$

$p(A,D) \parallel p(B,C)$

Sad imamo

$p(A,B) \parallel p(C,D)$ i $p(A,D) \parallel p(B,C)$ $\Rightarrow$ $\square ABCD$ je paralelogram

„$\Rightarrow$": $\square ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove

Završiti za vježbu.

Uputa: Prvo pokazati da je $AB \cong CD$. Pa onda da je $\triangle ABS \cong \triangle CDS$

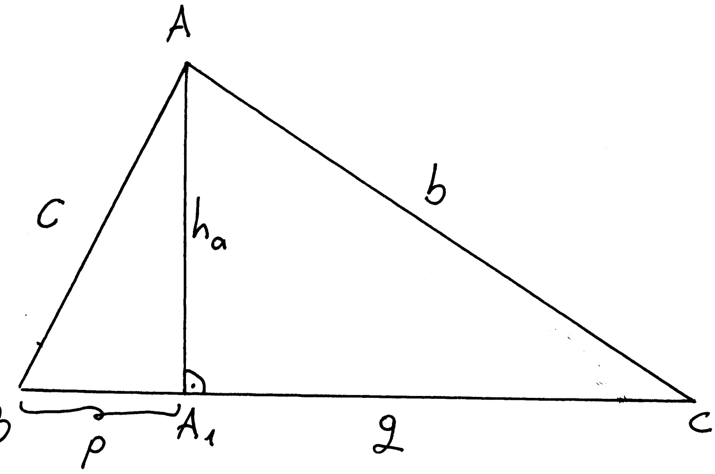
$\Downarrow$

$BS \cong DS$ i $AS \cong CS$

q.e.d.

(#) Površina pravouglog trougla ΔABC se računa po formuli $P=\frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Iskoristiti ovu formulu i pomoću nje izvesti formulu za površinu $P=\frac{a \cdot h_a}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla (h_a je visina spuštena na stranicu a). Izvesti formulu i za površinu jednakostraničnog trougla u kojoj se kao promjenjiva pojavljuje samo stranica a.

Rj. raznostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BA_1A} + P_{\Delta AA_1C}$$

$$P_{\Delta BA_1A} = \frac{p \cdot h_a}{2}$$

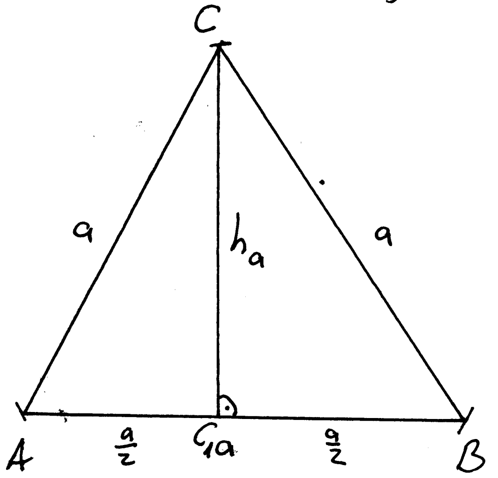
$$P_{\Delta A_1CA} = \frac{q \cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{p \cdot h_a}{2} + \frac{q \cdot h_a}{2} = \frac{p \cdot h_a + q \cdot h_a}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{(p+q)\, h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

q.e.d.

jednakostraničan trougao



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AC_1C} + P_{\Delta BCC_1}$$

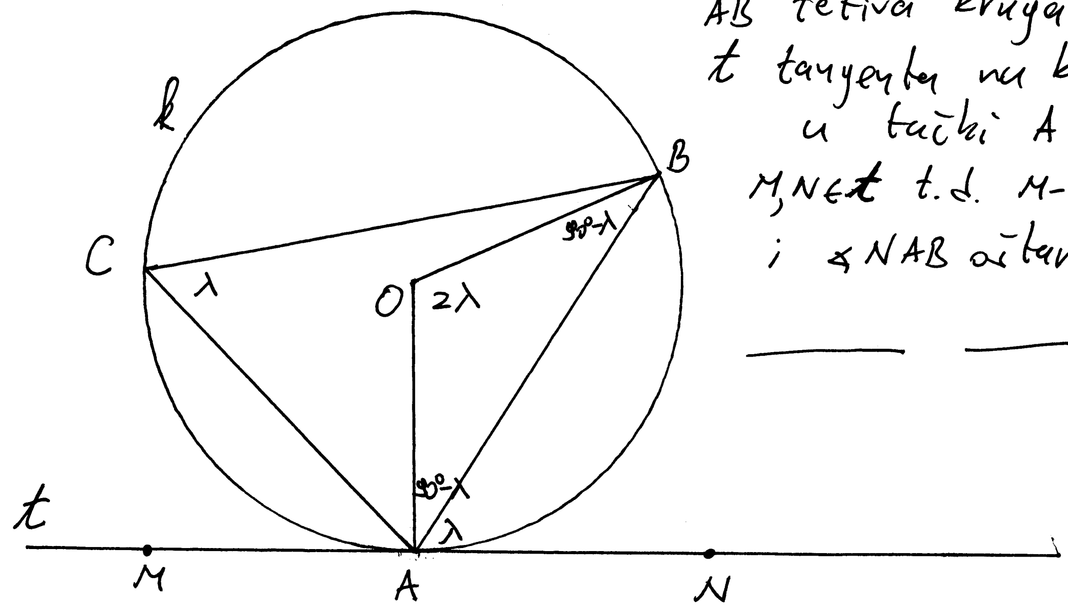
$$\left.\begin{aligned} P_{\Delta AC_1C} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{4} \\ P_{\Delta BCC_1} &= \frac{\frac{a}{2} \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot h_a}{4} \end{aligned}\right\} P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$h_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h_a = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \qquad P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(#) Dokazati da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Rj.



$k(O,r)$ dati krug
AB tetiva kruga
t tangenta na krug u tački A
$M, N \in t$ t.d. $M-A-N$
i $\measuredangle NAB$ oštar

$\Rightarrow \measuredangle NAB \cong \measuredangle ACB$

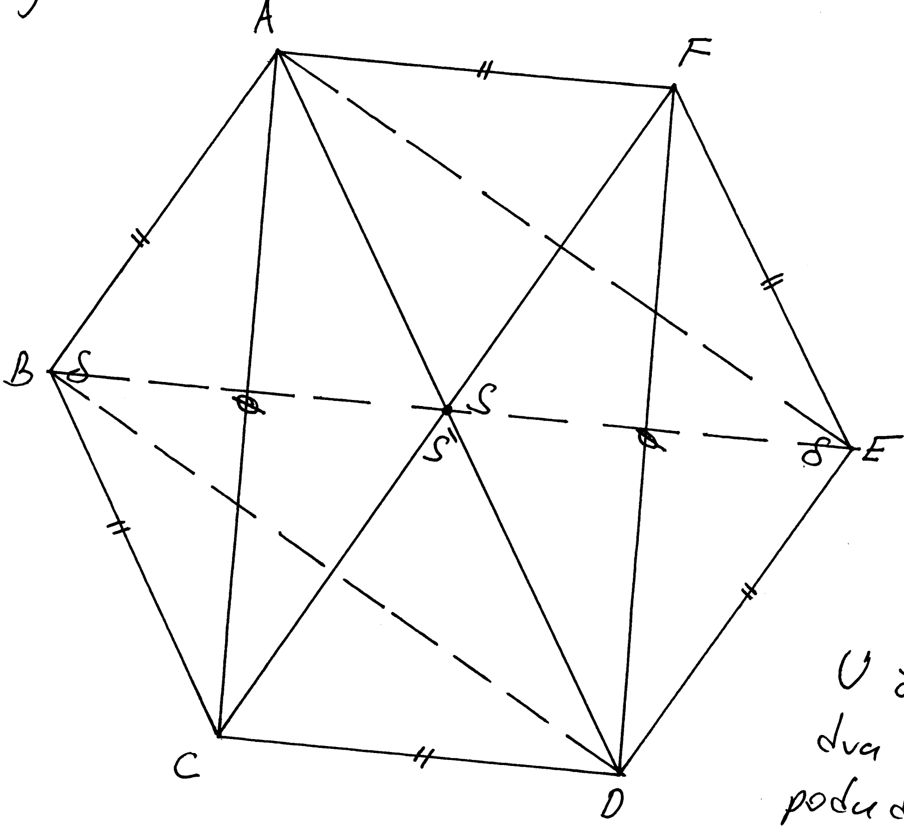
$\measuredangle ACB = \lambda \Rightarrow \measuredangle AOB = 2\lambda \Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90° - \lambda$

Kako je $OA \perp t \Rightarrow \measuredangle BAN = \lambda \Rightarrow \measuredangle ACB \cong \measuredangle BAN = \lambda$

q.e.d.

(#) Pravilan šestougao je šestougao kod koga su podudarne sve stranice i podudarni svi uglovi. Dat je pravilan šestougao ABCDEF. Dokazati da se dijagonale AD, CF i BE sijeku u istoj tački S.

Rj.



Presjek dijagonala AD i CF označimo sa S.
Posmatrajmo $\triangle ABC$ i $\triangle FDE$.
Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong EF \\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle FED = \delta \\ BC \cong ED \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$
$$\Downarrow$$
$$AC \cong FD$$

U četverouglu $\square ACDF$ imamo dva para naspremnih podudarnih stranica $\Rightarrow$

$\Rightarrow \square ACDF$ je paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale CF i AD se polove tj. S je sredina dijagonale CF i S je sredina dijagonale AD.

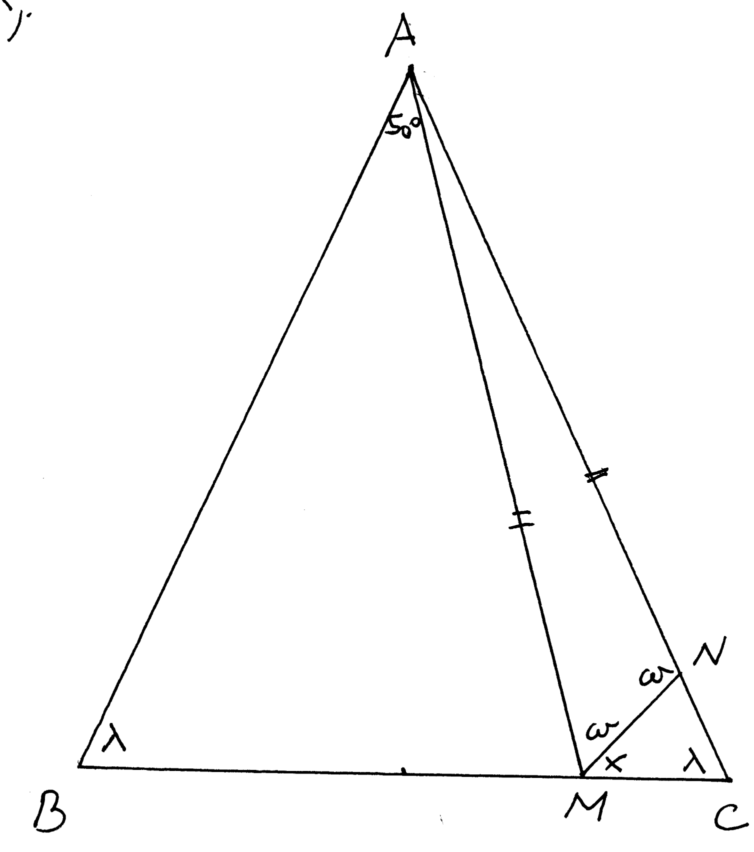
Dalje neka je $\{S'\} = BE \cap AD$. Na isti način kao maloprije se pokaže da je $\square BDEA$ paralelogram $\Rightarrow$ dijagonale se polove $\Rightarrow$ S' sredina BE i S' sredina AD.

$$\left.\begin{array}{l} S' \text{ sredina } AD \\ S \text{ sredina } AD \end{array}\right\} \Rightarrow S \equiv S' \Rightarrow$$ dijagonale AD, CF i BE se sijeku u tački S

q.e.d.

(#) Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\sphericalangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\sphericalangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\sphericalangle CMN$.

Rj:



$\sphericalangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$$\omega = x + \lambda \quad \ldots(1)$$

$\sphericalangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$$50° + \lambda = \omega + x \quad \ldots(2)$$

$(1)+(2)$:

$$\underline{\underline{\omega}} + 50° + \underline{\lambda} = x + \underline{\lambda} + \underline{\underline{\omega}} + x$$

$$2x = 50°$$

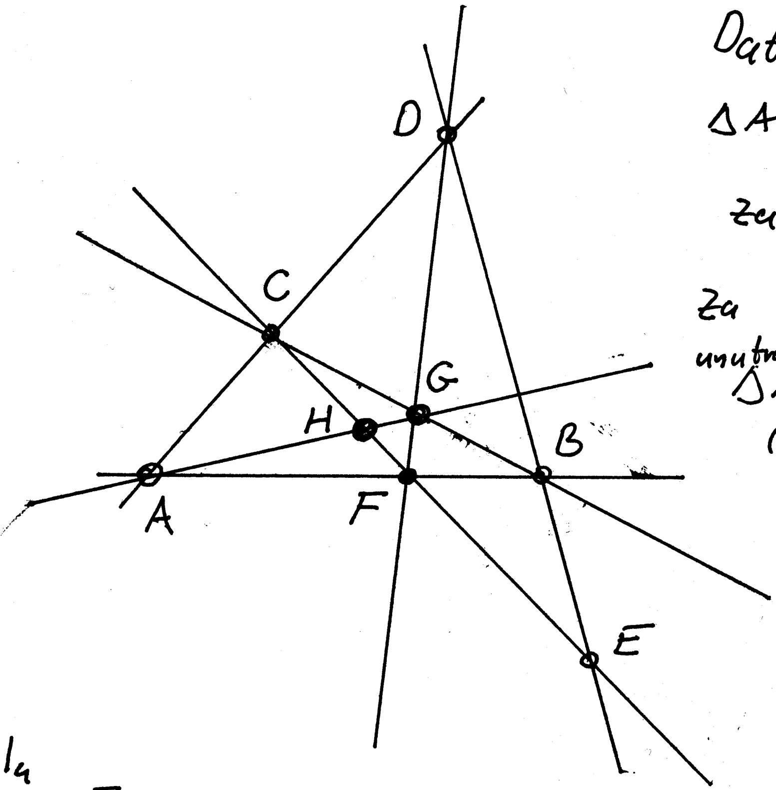
$$x = 25°$$

Isključivo aksiomama incidencije i poretka pokazati da je unutrašnjost trougla neprazan skup.

Rj:

postavka zadatka

$\Delta ABC \implies \exists$ tačka H takva da $H \in$ unutrašnjosti ΔABC



Date su tačke A, B i C tj. ΔABC.

za A i C prema II_2 $\exists D: A-C-D$

Za D i B prema II_2 $\exists E: D-B-E$

unutrašnjost ΔABC je konveksna figura (dobijena kao presjek tri poluravni)

A, B, D nekolinearne tačke
$p(C, E)$ nije incidentna ni sa jednom od tih tački
$\exists C \in p(C, D)$ takva da $A-C-D$
$\Big\} \xRightarrow{II_4}$

$\xRightarrow{II_4} \exists F \in p(C, E): \; A-F-B \veebar B-F-D.$

Prava $p(E, C)$ ne sijeće pravu $p(B, D)$ između tački B i D zato što tu pravu ona sijeće u tački E (zato što je $D-B-E$). Prema tome $A-F-B$.

A, B, C nekolinearne tačke
$p(F, D)$ nije incidentna ni sa jednom od tački A, B, C
$\exists F \in p(F, D)$ taka $A-F-B$
$\Big\} \xRightarrow[(A-C-D)]{II_4} \exists G \in p(F, D)$: $C-G-B$

C, F, B nekolinearne tačke
$p(A, G)$ nije incidentna ni sa jednom od tački C, F i B
$\exists G \in p(A, G)$ tako $C-G-B$
$\Big\} \xRightarrow[(A-F-B)]{II_4} \exists H \in p(A, G)$: $A-H-G$

A vrh trougla, $G \in BC$ i $A-H-G \xRightarrow{\Delta ABC \text{ je konveksan}} H \in$ unutr. ΔABC

q.e.d.

(#) Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow a, b$ i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

$\underline{a, b}, c, d$ tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b (S) = \sigma_d \circ \sigma_c (S) \quad \Rightarrow \quad \sigma_d \circ \sigma_c (S) = S$

Prema tome ako je

$\sigma_d \circ \sigma_c (S) = S$ i

$\sigma_c (S) = S$ to znači da se c i d sijeku u tački S. (to je moguće samo u slučaju)

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \not\equiv S)$ dobili bi da

$\sigma_d \circ \sigma_c (S) = \sigma_d (S') = S \Rightarrow$

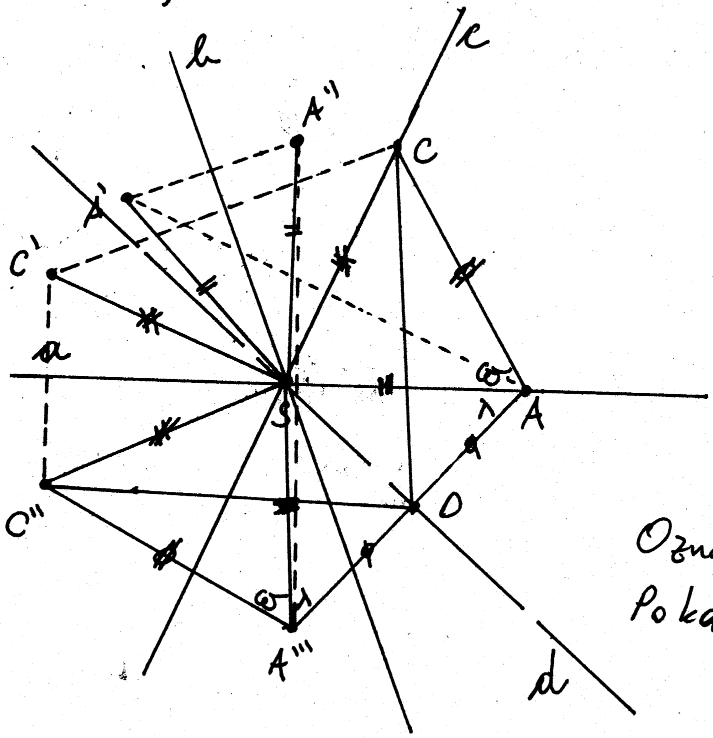
$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$

kontrad. (sa $c \not\equiv d$)

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow a, b$ i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

„$\Rightarrow$": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap c = \{S\}$. Označimo sa $\gamma = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$



a) posmatrajmo tačku S

$\gamma(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\sigma_c(A) = A'$, $\sigma_b(A') = A''$, $\sigma_a(A'') = A'''$

tj. $\gamma(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA''', Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \sigma_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \sigma_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in c$, $C \neq S$. Neka je

$\sigma_c(C) = C$, $\sigma_b(C) = C'$, $\sigma_a(C') = C''$ tj. $\gamma(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\sphericalangle DAS \cong \sphericalangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \gamma(A)\gamma(C) = A'''C''$

Dalje imamo
$$\left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \overset{sss}{\Longrightarrow} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$
$$\Downarrow$$
$$\sphericalangle C''A'''S \cong \sphericalangle SAC = \omega$$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow CD \cong C''D \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow d$ simetrala CC''

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} \gamma(S) = S \\ \gamma(A) = A''' \\ \gamma(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_d(S) = S \\ \sigma_d(A) = A''' \\ \sigma_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{nekolinearni}]{A,\, S,\, C} \sigma_d = \gamma \text{ tj. } \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$$

q.e.d.

(#) Neka je AB najmanja stranica trougla ΔABC i M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla ΔABC. Dokazati da je $MA+MB+MC < AC+BC$.

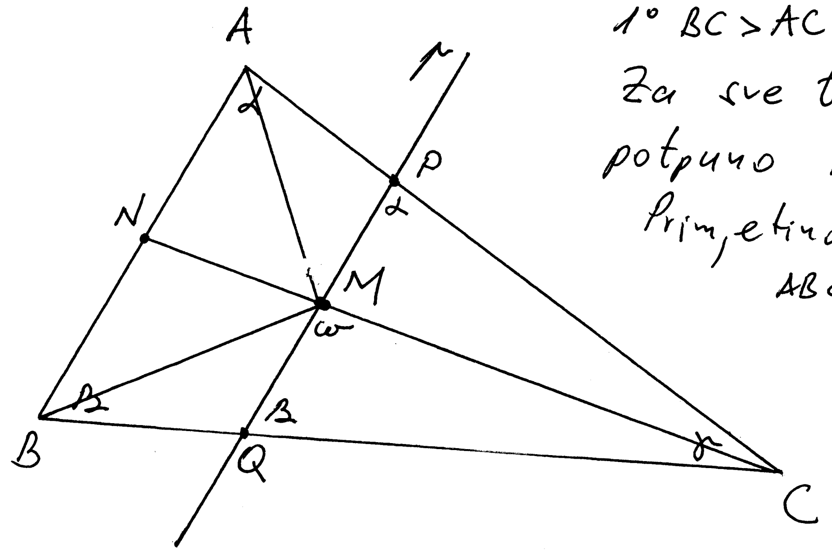
Rj.

postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC \\ AB \text{ najmanja stranica} \\ M \text{ proizvoljna tačka u} \\ \quad \text{unutrašnjosti trougla}\end{array}\right\} \Longrightarrow MA+MB+MC < AC+BC$$

Prema pretpostavci u ΔABC najmanja stranica je AB. Za stranice AC i BC je moguć jedan od sljedeća tri slučaja

$1^\circ\ BC > AC \quad 2^\circ\ BC \cong AC$ i $3^\circ\ BC < AC$



Za sve tri slučaja rješenje je potpuno isto, pa neka je $BC > AC$.

Primjetimo sad da imamo

$AB < AC < BC \Rightarrow \gamma < \beta < \alpha$.

Dalje, neka je M proizvoljna tačka u unutrašnjosti trougla.

Kroz tačku M konstruišimo pravu p t.d. $p \parallel p(A,B)$.

$p \cap AC = \{P\}$ i $p \cap BC = Q$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle CPQ = \alpha$

$p(P,Q) \parallel p(A,B)$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CBA \cong \measuredangle CQP = \beta$

Ugao $\measuredangle CMQ = \omega$. je vanjski ugao ΔCPM pa je $\omega > \alpha$.

Kako je $\alpha > \beta$ to je $\omega > \beta \overset{\Delta QCM}{\Longrightarrow} QC > MC$

Dalje $\left.\begin{array}{l} MB < BQ + MQ \\ AM < AP + MP \end{array}\right\} + \Rightarrow MB+MA < BQ+AP+\underbrace{PM+MQ}_{=PQ}$

$MA+MB < BQ+AP+PQ \overset{\text{ZAŠTO}}{<} BQ+AP+PC$

Konačno imamo

$$\left.\begin{array}{l} MC < QC \\ MA+MB < BQ+AP+PC \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} MA+MB+MC < AC+BC$$

q.e.d.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 15.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2\,cm$, $h_b = 4\,cm$ i $h_c = 6\,cm$?

b) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\measuredangle ABM \cong \measuredangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

c) Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B i C datog trougla.

d) Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC), k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P presječna tačka poluprave $pp[B, I)$ i kruga k. Dokazati da je $\triangle AIP$ jednakokraki.

e) Neka je I centar upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ (AB<BC). Neka je k krug opisan oko trougla $\triangle ABC$ i tačka P središte luka AC (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Zadatak br. 2

Dokazati tvrđenja:
a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;
b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

Zadatak br. 3

Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna - sama sebi inverzna).

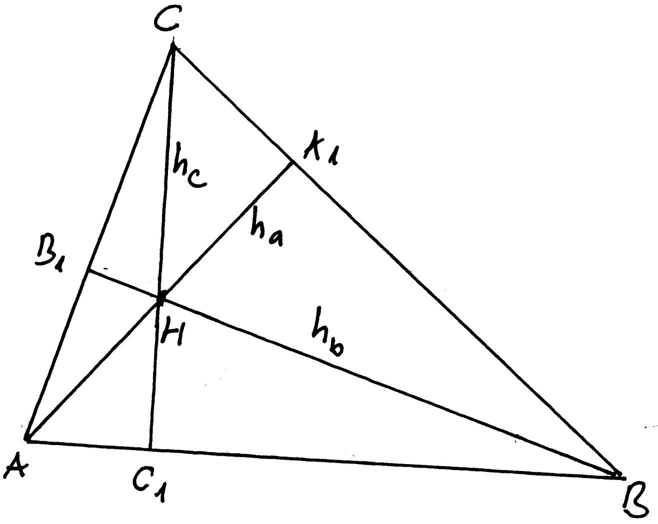
Zadatak br. 4

Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla $\triangle ABC$, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\measuredangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

⑦ Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2$ cm, $h_b = 4$ cm i $h_c = 6$ cm?

Rj.



$h_a = 2$ cm

$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2a}{2} = a$

$h_b = 4$ cm

$P = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$

$h_c = 6$ cm

$P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{6c}{2} = 3c$

Sad imamo

$a = 2b = 3c$ tj. $b = \frac{1}{2}a$

$c = \frac{1}{3}a$

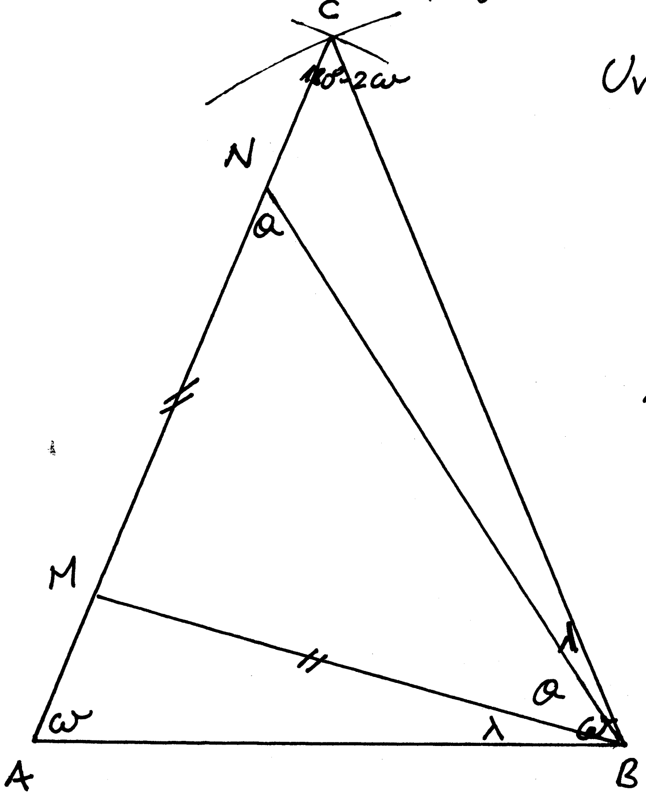
Kako je

$b + c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a = \frac{5}{6}a$ tj. $b + c < a$

trougao sa datim dužinama visina ne postoji (zbir dvije stranice mora biti veći od treće).

(#) Dat je jednakokraki trougao ΔABC $(AC = BC)$. Na kraku AC odabrane su dvije tačke M i N tako da je $\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN$ i $MN \cong MB$, pri čemu je tačka M bliža tački A nego tačka N. Koliki je ugao $\sphericalangle ABN$?

Rj.



Uvedimo oznake

$\sphericalangle ABM \cong \sphericalangle CBN = \lambda$

(prema pretpostavci)

ΔABC jkk $\Rightarrow \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle BAC = \omega$.

ΔBMN jkk $\Rightarrow \sphericalangle MBN \cong \sphericalangle BNM = \alpha$.

Sad primjetimo

$\sphericalangle ABC = 180° - 2\omega$

Kako je $\sphericalangle BNA$ vanjski ugao ΔABC to je

$\alpha = 180° - 2\omega + \lambda$

(kako je $\sphericalangle BMA$ vanjski ugao ΔABM) $\Rightarrow$

$$\sphericalangle AMB = 2\alpha = 360° - 4\omega + 2\lambda$$

Posmatrajmo trougao ΔABM.

$$\omega + \lambda + 360° - 4\omega + 2\lambda = 180°$$

$$3\omega - 3\lambda = 180° \quad /:3$$

$$\omega = 60° + \lambda \Rightarrow \alpha = 180° - 120° - 2\lambda + \lambda$$

$$\alpha = 60° - \lambda$$

Na kraju $\sphericalangle ABN = \lambda + \alpha = \lambda + 60° - \lambda = 60°$

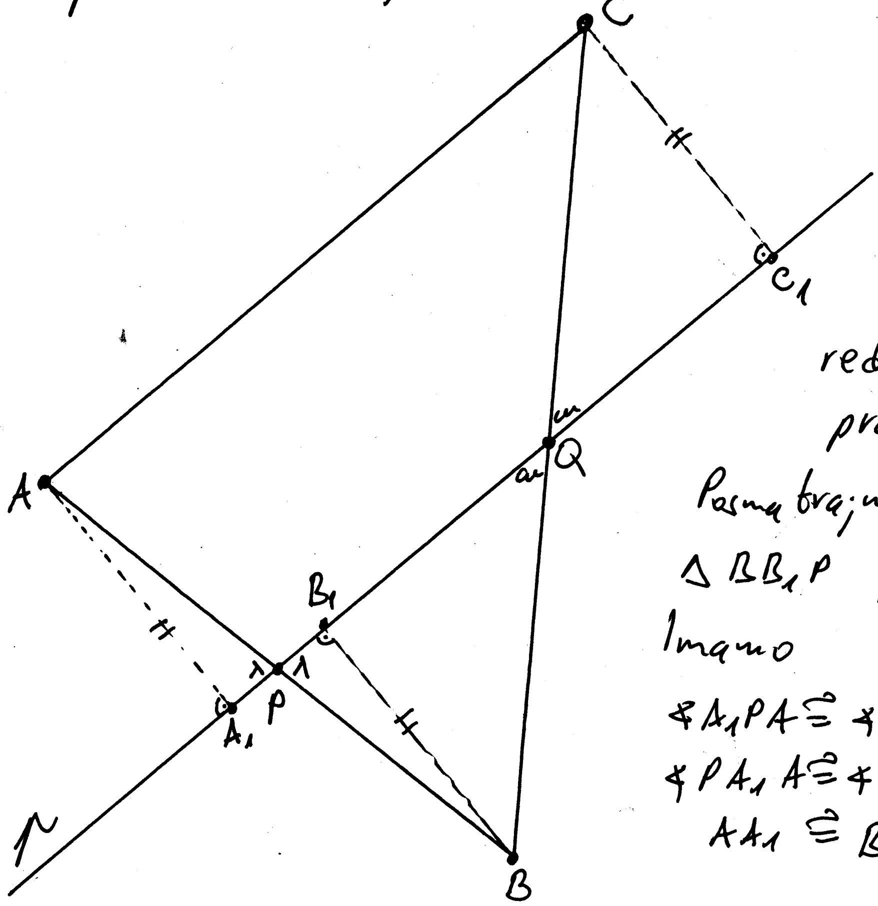
$$\sphericalangle ABN = 60°.$$

(#) Dat je trougao ΔABC. Konstruisati pravu p koja je jednako udaljena od vrhova A, B, C datog trougla.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je p tražena prava koja je podjednako udaljena od vrhova A, B i C trougla ΔABC, i neka je poredak tački kao na slici.



Označimo sa A_1, B_1 i C_1 ortogonalne projekcije redom tački A, B i C na pravu p.

Posmatrajmo trouglove ΔAA_1P i ΔBB_1P gdje je $\{P\} = p \cap AB$.

Imamo

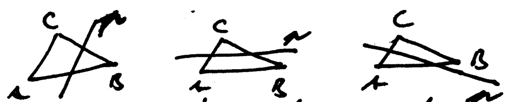
$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle A_1PA \cong \measuredangle B_1PB = \lambda \\ \measuredangle PA_1A \cong \measuredangle PB_1B = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \Delta AA_1P \cong \Delta BB_1P \Rightarrow AP \cong BP$$

Slično, posmatrajmo ΔB_1BQ i ΔC_1CQ (gdje je $\{Q\} = p \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle B_1QB \cong \measuredangle C_1QC = \omega \\ \measuredangle BB_1Q \cong \measuredangle CC_1Q = 90^\circ \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{UUS} \Delta BB_1Q \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BQ \cong CQ.$$

Prema tome možemo primijetiti da prava p prolazi kroz središte stranica AB i BC pa je možemo konstruisati.

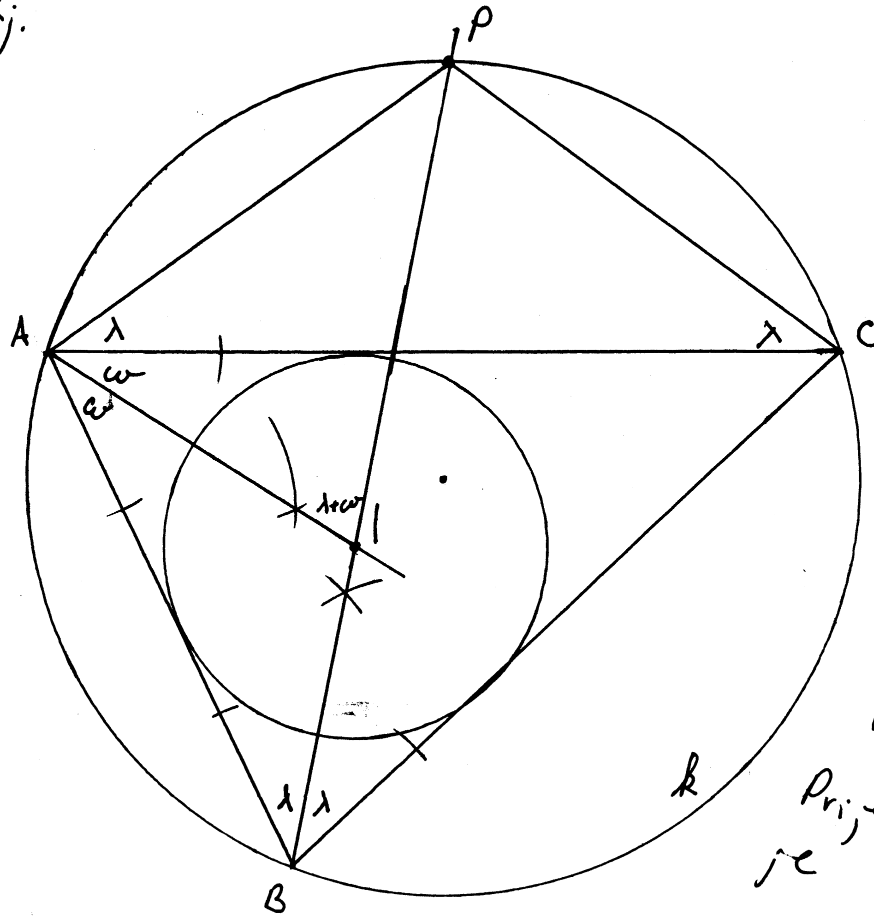
Diskusija



Zadatak ima tri rješenja, tj. možemo konstruisati tri različite prave koje su jednako udaljene od vrhova A, B i C datog trougla

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC ($AB<BC$), k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P presječna tačka poluprave pp$[B,I)$ i kruga k. Dokazati da je ΔAIP jednakokraki.

Rj.



Tačka I leži na presjeku simetrala uglova pa imamo da je $\measuredangle ABP \cong \measuredangle CBP = \lambda$. Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa možemo zaključiti da je

$\measuredangle PAC = \measuredangle PBC = \lambda$ i

$\measuredangle PCA = \measuredangle ABP = \lambda$

Posmatrajmo sad ΔAIP.

Prije toga primjetimo da je $\measuredangle BAI \cong \measuredangle CAI = \omega$

(ZAŠTO?)

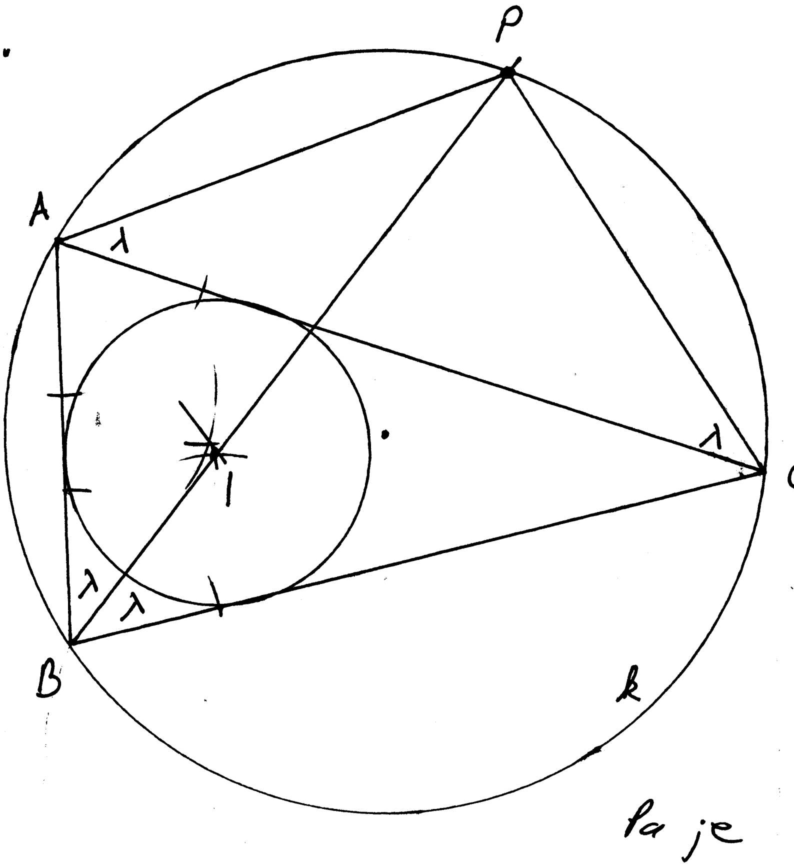
U trouglu ΔPAI $\measuredangle PAI = \lambda + \omega$. Ugao $\measuredangle AIP$ je vanjski ugao trougla ΔAIB pa je $\measuredangle PIA = \measuredangle ABI + \measuredangle IAB = \lambda + \omega$ (vanjski ugao trougla jednak je zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla). Prema tome $\measuredangle PAI \cong \measuredangle AIP = \lambda + \omega$

$\Rightarrow$ ΔAPI je jkk

q.e.d.

(#) Neka je I centar upisanog kruga trougla ΔABC $(AB < BC)$. Neka je k krug opisan oko trougla ΔABC i tačka P središte luka $\widehat{AC}$ (kojem ne pripada tačka B) kruga k. Dokazati da I pripada duži BP.

Rj.



P središte luka AC

$\Rightarrow$ P je podjednako udaljena od tački A i C $\Rightarrow$ ΔACP jkk

$\Rightarrow \sphericalangle PAC \cong \sphericalangle PCA = \lambda$.

Četverougao $\square ABCP$ je tetivni pa imam da

$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PAC = \lambda$ i

$\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle ACP = \lambda$

Pa je BP simetrala ugla $\sphericalangle ABC$.

Kako je tačka I presjek simetrala uglova to je

$I \in BP$

q.e.d.

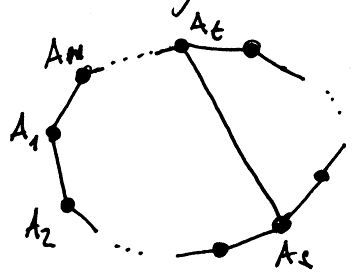
(#) Dokazati tvrđenja:

(a) Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla;

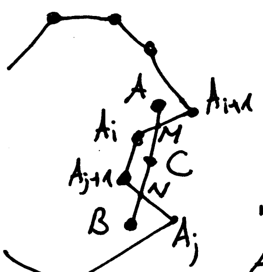
(b) Svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

Rj. Prisjetimo se definicije konveksnosti: Za figuru F u ravni ili u prostoru kažemo da je konveksna ako za svake dvije tačke $A i B$ iz F imamo da sve tačke duži AB pripadaju figuri F.

a) Neka je $A_1 A_2 \dots A_n$ konveksan mnogougao. Trebamo dokazati da svaka dijagonala dijeli ovaj mnogougao na dva konveksna mnogougla.



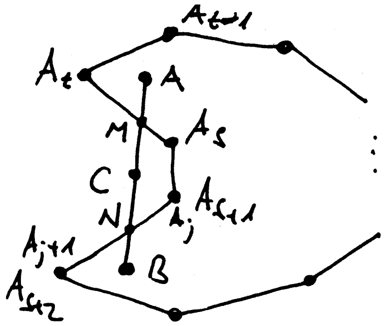
Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da postoji dijagonala $A_t A_s$ koja dijeli mnogougao na dva mnogougla od kojih jedan nije konveksan. Mnogougao koji nije konveksan označimo sa $A_s A_{s+1} \dots A_t$. Kako mnogougao nije konveksan to znači da postoje dvije tačke A i B koje pripadaju unutrašnjosti mnogougla ali $AB \not\subset A_s A_{s+1} \dots A_t$. To znači da $\exists$ tačka $C \in AB$



takva da $C \notin$ unutrašnjosti mnogougla.
Ako sad posmatramo duži AC i BC, kako A i B pripadaju unutrašnjosti a tačka C vanjskoj oblasti mnogougla to AC siječe neku stranicu mnogougla $A_i A_{i+1}$ u tački M a BC neku drugu stranicu $A_j A_{j+1}$ u tački N.

Za tačke M i N je moguć jedan od sljedeća dva slučaja:
1° tačka M ili N pripada dijagonali $A_s A_t$ mnogougla $A_1 A_2 \dots A_n$
2° tačke M i N ne pripadaju dijagonali $A_s A_t$ mnogougla $A_1 A_2 \dots A_n$

Pa razmotrimo prvi slučaj.



Recimo da M pripada dijagonali A_tA_s mnogougla $A_1A_2\ldots A_N$. Slično razmatranje bi imali i za slučaj da tačka N pripada dijagonali.

Posmatrajmo mnogougao $A_1A_2\ldots A_N$ i stranicu A_jA_{j+1} mnogougla kojoj pripada tačka N. Znamo da su tačke B i C sa različitih strana $p(A_j, A_{j+1})$. Ovo znači da poluravan sa ivicom u $p(A_j, A_{j+1})$ koja sadrži tačku B ne sadrži sve vrhove (npr. ne sadrži vrh A_t)

#kontradikcija

(za konveksan mnogougao svi vrhovi mnogougla se nalaze u istoj poluravni određenoj pravom koja sadrži ma koju stranicu mnogougla).

Prema tome prvi slučaj nije moguć.

Međutim ako bi bio drugi slučaj odmah imam da su A i B unutrašnje tačke mnogougla $A_1A_2\ldots A_N$ ali $AB \not\subset$ mnogouglu

$\Rightarrow$ mnogougao $A_1A_2\ldots A_N$ nije konveksan

#kontradikcija (mnogougao je konveksan)

Možemo zaključiti: Svaka dijagonala dijeli konveksan mnogougao na dva konveksna mnogougla.

q.e.d.

b) Dokaz za ovaj dio se lagano može svesti na dio pod a).
Neka je dat konveksan mnogougao $A_1A_2\ldots A_N$ i neka su A i B proizvoljne tačke na različitim stranicama mnogougla.
Sad možemo posmatrati mnogougao $A_1A_2\ldots A_iAA_{i+1}\ldots A_jBA_{j+1}\ldots A_N$ i sprovesti razmatranje kao u slučaju pod a). Prema tome svaka duž čije krajnje tačke pripadaju različitim stranicama konveksnog mnogougla dijeli taj mnogougao na dva konveksna mnogougla.

q.e.d.

(#) Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna – sama sebi inverzna).

Rj.

postavka zadatka

$\left.\begin{array}{l} \pi \text{ transformacija podudarnosti u ravni} \\ \pi \circ \pi = id \end{array}\right\} \Rightarrow \pi$ je ________ ;

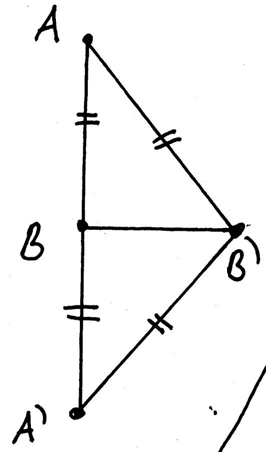
________ .

$\pi \circ \pi = id \Rightarrow \pi = id \vee \pi \neq id$

Kako je id (identitet) transformacija podudarnosti u ravni i vrijedi $id \circ id = id$ $\Rightarrow$ id je involutivna transformacija podudarnosti u ravni

Neka je sad $\pi \neq id$ involutivna transformacija podud. u ravni. π nije identitet pa $\exists$ tačka A takvu da $\pi(A) = A'$. Kako je π involutivna transformacija to $\pi \circ \pi(A) = A$ tj. $\pi(\pi(A)) = \pi(A') = A$. Prema tome imamo

$$\pi(A) = A' \ ; \ \pi(A') = A .$$



Označimo sa B sredinu duži AA'. Za tačku B je moguć tačno jedan od sljedeća dva slučaja:

1° $\pi(B) = B$

2° $\pi(B) = B'$; $B \neq B'$.

Da bi odredili šta je π, posmatraćemo ponašanje involutivne transf. podud. π na tri nekolinearne tačke u ravni.

Ako bi bio drugi slučaj, kako transformacija π čuva dužine, bi imali sljedeće:

$AB \cong \pi(A)\pi(B) = A'B'$
$AB \cong A'B$ (B sredina AB)
$A'B \cong \pi(A')\pi(B) = AB'$

$\Rightarrow$ A i A' leže na simetrali duži BB'

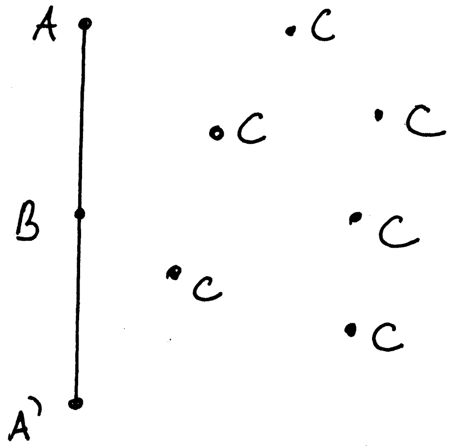
$\Downarrow$

$B \notin p(A,A')$
#kontradikcija
(sa činjenicom da je B sredina AA')

Prema tome pretpostavka da je 2° nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Tj. imamo

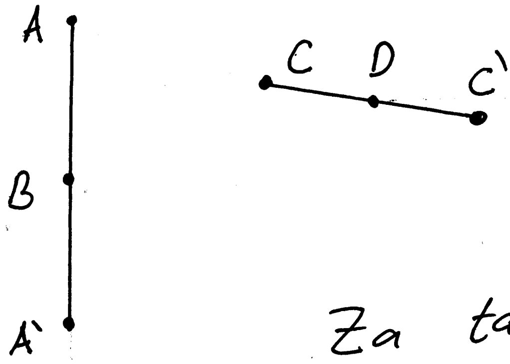
$$\pi(B) = B$$

Sad se pitamo da li postoji tačka C ($C \notin p(A,A')$) t.d. $\pi(C) \neq C$?



Ako bi bilo $\pi(C) = C$ za svaku tačku $C \notin p(A,A')$, kako π čuva dužine imali bi $AC \cong A'C$ $\forall C$ što je očigledno nemoguće (samo tačke sa simetrale duži AA' imaju tu osobinu).

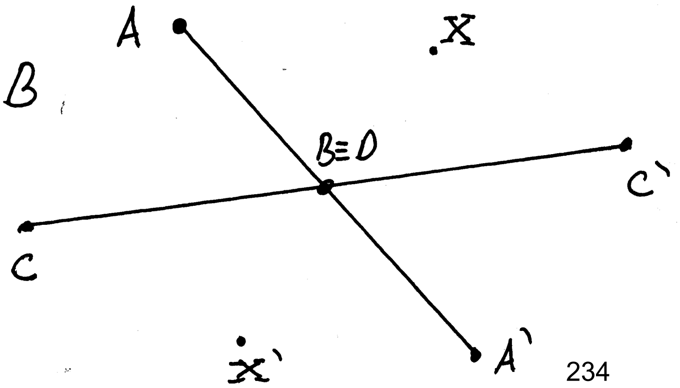
Prema tome $\exists$ tačka C t.d. $\pi(C) = C'$ i $C \neq C'$.



Ako sa D označimo sredinu duži CC' na isti način kao maloprije nije teško pokazati da je $\pi(D) = D$.

Za tačku D je moguć tačno jedan od sljedeća dva slučaja: 1° $D \equiv B$
2° $D \neq B$.

1° $D \equiv B$



Tačke A, B i C su nekolinearne i za njih važi sljedeće:
$\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B$, $\pi(C) = C'$

$\pi(A) = A'$ i B sredina duži AA'

$\pi(C) = C'$ i B sredina duži CC'

Za proizvoljnu tačku X iz ravni ABC takvu da $X \neq B$ imamo da je ili $\pi(X) = X$ ili $\pi(X) = X'$ $(X \neq X')$.

Ako bi bilo $\pi(X) = X$ nije teško pokazati da bi tada X pripadala simetrali duži AA' i simetrali duži CC'. Kako su to dvije različite simetrale a X pripada i jednoj i drugoj X je presječna tačka simetrala. Ali, kako se ove simetrale sijeku u tački B (OBJASNITI ZAŠTO) dobili bi da je $X \equiv B$ # kontradikcija.

Prema tome mora biti $\pi(X) = X'$ i $X \neq X$. Sad imam

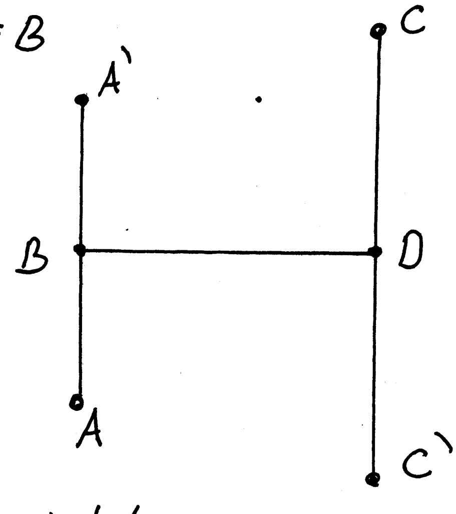
$$\left.\begin{array}{l} AX \cong \pi(A)\pi(X) = A'X' \\ XB \cong \pi(X)\pi(B) = X'B \\ AB \cong A'B \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle ABX \cong \triangle A'BX'$$

$$\Downarrow$$

B je sredina XX'

Prema tome naša transformacija podudarnosti π ima samo jednu fiksnu tačku B; svaku tačku X iz ravni preslikava u neku novu tačku X' tako da je B sredina duži XX'. Iste ove osobine ima i centralna simetrija. Prema tome π je centralna simetrija sa centrom simetrije u tački B.

2° $D \neq B$



Pokazati za vežbu da u ovom slučaju π mora biti osna simetrija sa osom u pravoj $p(B,D)$.

Prema tome našli smo tri involutivne transformacije podudarnosti u ravni:

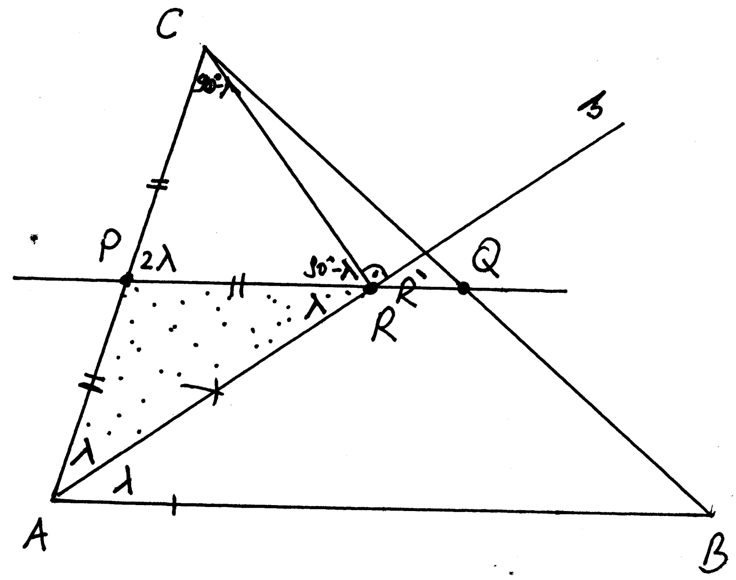
1. identitet 2. centralna simetrija 3. osna simetrija.

(#) Neka su P i Q redom sredine stranica AC i BC trougla $\triangle ABC$, R ortogonalna projekcija tjemena C na simetralu ugla $\measuredangle BAC$. Dokazati da su tačke P, Q i R kolinearne.

Rj.

postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC \\ P \text{ sredina } AC \\ Q \text{ sredina } BC \\ s \text{ simetrala ugla } \measuredangle BAC \\ R \text{ ortogonalna projekcija tjemena } C \text{ na } s \end{array}\right\} \Rightarrow P, Q \text{ i } R \text{ su kolinearne tačke}$$



P sredina AC, Q sredina BC

$\Rightarrow PQ$ srednja linija trougla

$\Rightarrow PQ \parallel AB$ i $PQ = \frac{1}{2} AB$

$PQ \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala

$\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle QPC = 2\lambda$

Označimo sa R' presjek simetrale s i $p(P,Q)$.

Posmatrajmo $\triangle APR'$. Vanjski ugao tog trougla je $\measuredangle R'PC = 2\lambda$. Kako je vanjski ugao jednak zbiru unutrašnja dva nesusjedna ugla i $\measuredangle R'AP = \lambda$ imamo da je $\measuredangle AR'P = \lambda$.

$\Rightarrow \triangle APR'$ je jkk. tj. $AP \cong PR'$.

P je sredina AC $\Rightarrow AP \cong PC \Rightarrow \triangle CPR'$ je jkk sa osnovicom u CR, i uglom $\measuredangle CPR = 2\lambda$.

Imamo da $\measuredangle PCR' \cong \measuredangle PR'C = 90° - \lambda$.

$\measuredangle AR'C = \lambda + 90° - \lambda = 90° \xRightarrow{R \text{ ortog. pr. na } s} R' \equiv R$

Prema tome tačke R, P i Q su kolinearne

q.e.d.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 30.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija 1**

Zadatak br. 1

a) Nacrtati trougao $\triangle ABC$, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označimo sa E. Produžimo stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A, B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

b) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

c) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB $(A, B \in k,\ S \in AB)$. Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC + BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

d) Neka je k krug koji je opisan oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$ i neka je tačka N središte luka AC (kojem pripada i tačka B) kruga k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačka presjeka prave $p(N, M)$ i opisanog kruga. Dokazati da je NP prečnik opisanog kruga.

e) Dokazati da su dva trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ podudarna ako je $c = c'$, $h_c = h_{c'}$ i $t_c = t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trougla $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ redom na stranice c i c'.

Zadatak br. 2

U ravni je dato n duži $(n \geq 3)$, takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

Zadatak br. 3

Data je transformacija podudarnosti π. Dokazati da su sve tačke prave $\pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha = \pi \circ \sigma_a \circ \pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α.
Napomena: Fiksna tačka transformacije π je svaka tačka B za koju je $\pi(B) = B$.

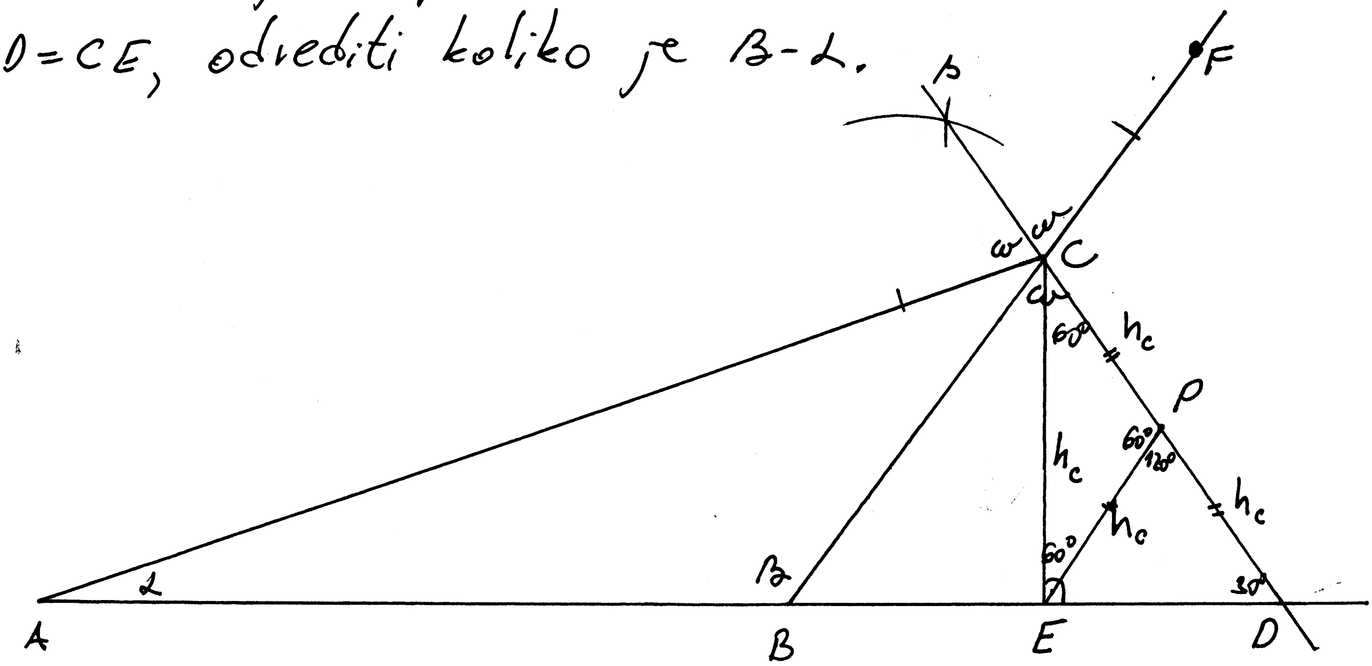
Zadatak br. 4

Dat je trougao $\triangle ABC$ i proizvoljna tačka P na krugu opisanom oko tog trougla. Neka su M, N i R redom podnožja normala povučenih iz tačke P na prave $p(A, B)$, $p(B, C)$ i $p(C, A)$. Dokazati da su tačke M, N i R kolinearne.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

(#) Nacrtaj trougao ΔABC, $(\beta > \alpha)$ i visinu h_c iz vrha C. Tačku u kojoj visina h_c iz vrha C siječe pravu AB označi sa E. Produži stranicu BC preko vrha C, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $p(A,B)$ označi sa D. Ako je $\frac{1}{2}CD = CE$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj.



Označimo sa s simetralu vanjskog ugla uz vrh C. Ako $\sphericalangle ACF$ označimo sa 2ω (gdje je $F \in pp[B,C)$ t.d. $B-C-F$) primjetimo da je $\sphericalangle BCD = \omega$ (unakrsni uglovi).

Sad posmatrajmo ΔEDC (pravougli trougao) kod koga imamo da je $CD = 2h_c$. Ako sa P označimo sredinu stranice CD možemo primjetiti da je $CP \cong DP = h_c$ i da je $EP = h_c$ (ZAŠTO?).

ΔEPC jks $\Rightarrow \sphericalangle EPC = 60° \Rightarrow \sphericalangle EPD = 120° \xRightarrow{\Delta EDP \text{ jkk}} \sphericalangle EDP = 30°$.

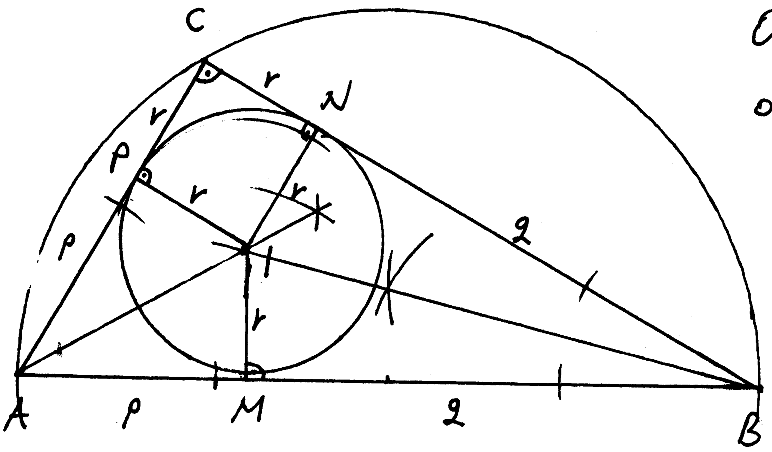
Ugao $\sphericalangle ACF$ vanjski ugao $\Delta ABC \Rightarrow 2\omega = \alpha + \beta$ ...(1)

Ugao $\sphericalangle ABC$ vanjski ugao $\Delta BDC \Rightarrow \beta = \omega + 30°$ tj. $\omega = \beta - 30°$ ...(2)

(1) i (2) $\Rightarrow 2\beta - 60° = \alpha + \beta \Rightarrow \beta - \alpha = 60°$ ← traženi rezultat

(#) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je

$IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad /:2$$

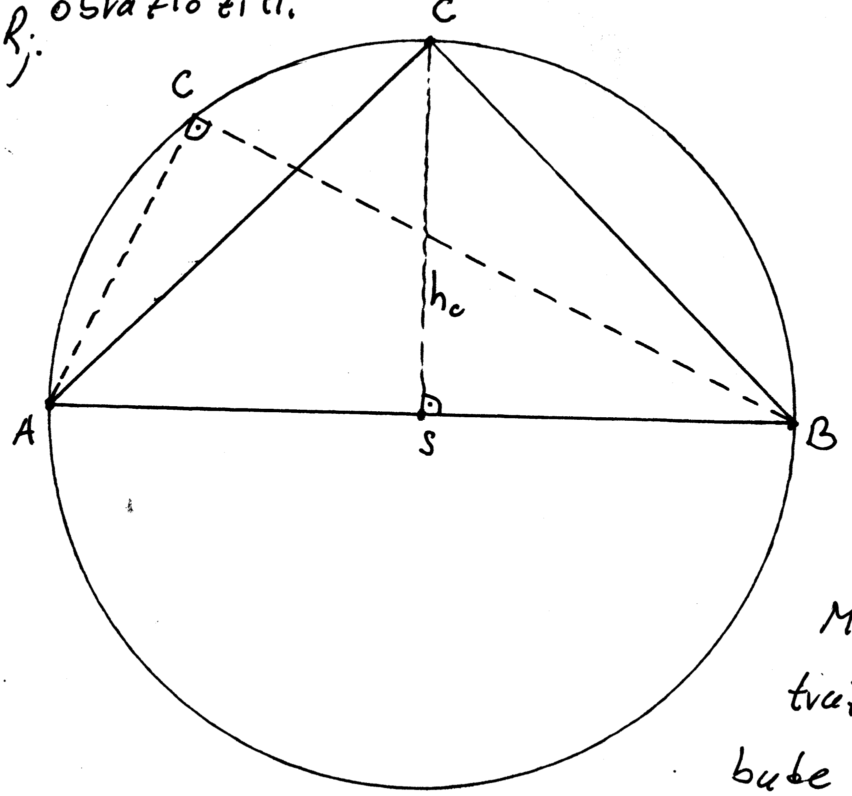
$$pq = pr + qr + r^2 \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \dfrac{pq + pq}{2} = pq$

q.e.d.

(#) Dat je krug k sa centrom u tački S i prečnikom AB ($A, B \in k$, $S \in AB$). Na krugu k odrediti tačku C tako da zbir duži $AC+BC$ bude najveći. Odgovor obrazložiti.

Rj.



Za svaku tačku C na krugu k dobićemo pravougli trougao ΔABC (ugao nad prečnikom je pravi).

Površina pravouglog trougla je $P = \frac{a \cdot b}{2}$.

Možemo primjetiti da problem traženja da zbir duži $AC+BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći;

$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot h_c}{2}$ (h_c - visina spuštena iz vrha C).

Prema tome problem da proizvod duži $AC \cdot BC$ bude najveći je ekvivalentan problemu traženja tačke C takve da visina h_c bude najveća.

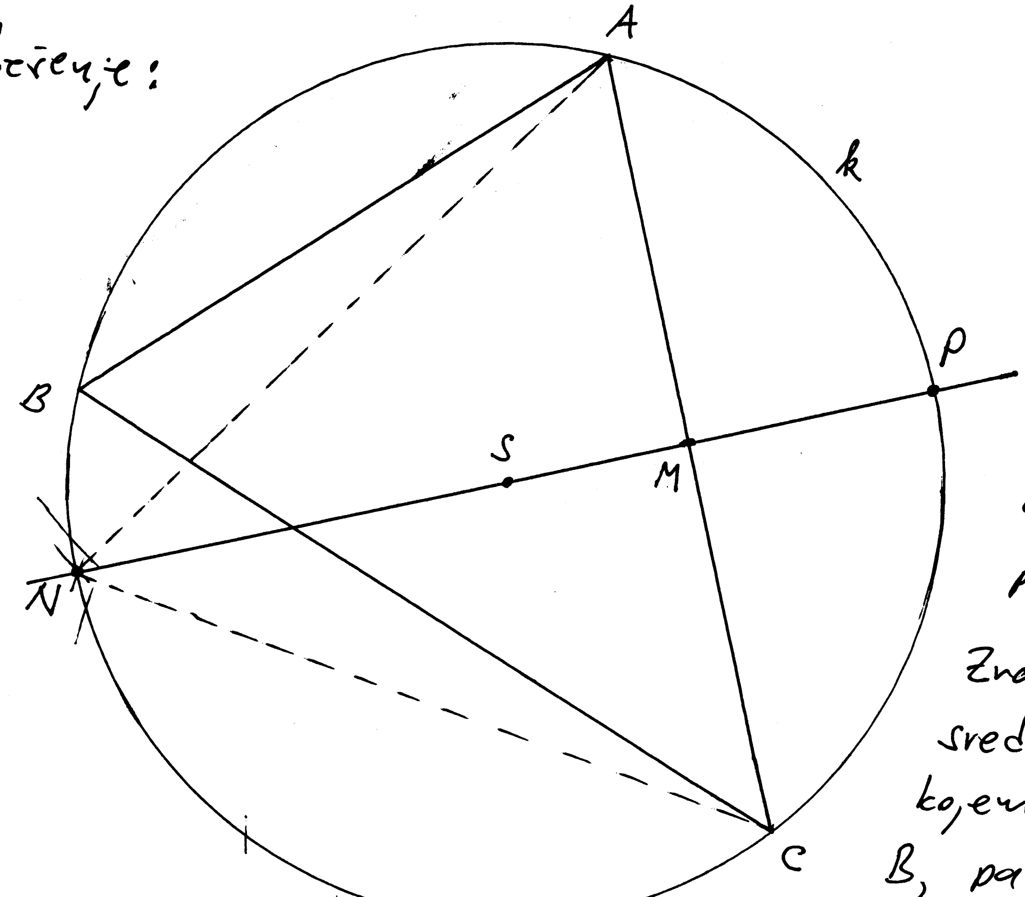
Najveća tetiva u krugu je prečnik kružnice pa naša visina treba da bude dio tog prečnika ili drugačije rečeno naša visina treba da bude poluprečnik CS kruga takav da $CS \perp AB$. Sad nije teško primjetiti da iz podudarnosti SUS slijeda da su ΔASC i ΔBSC podudni $\Rightarrow AC \cong BC$.

Prema tome, da bi zbir duži $AC+BC$ bio najveći tačku C trebamo izabrati takvu da je $AC \cong BC$.

q.e.d.

(#) Neka je k kružnica koja je opisana oko trougla $\triangle ABC$, $AB < AC$
i neka je tačka N središte luka $\overset{\frown}{AC}$ (kojem pripada i tačka B) kružnice k. Dalje, neka je M središte duži AC i $P \neq N$ tačku presjeka prave $p(N,M)$ i opisane kružnice. Dokazati da je NP prečnik opisane kružnice.

Rješenje:



Na osnovu postavke zadatka tačka M pripada duži NP.

Da bi pokazali da je duž NP prečnik opisane kružnice trebamo pokazati da tačka S pripada duži NP.

Znamo da je N sredina luka $\overset{\frown}{AC}$ kojem pripada tačka B, pa je N podjednako udaljena od tački A i C tj. $AN \cong NC$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} AN \cong NC \\ NM \cong NM \\ AM \cong MC \ (M \text{ sredina } AC) \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle ANM \cong \triangle CNM$$

$$\Downarrow$$

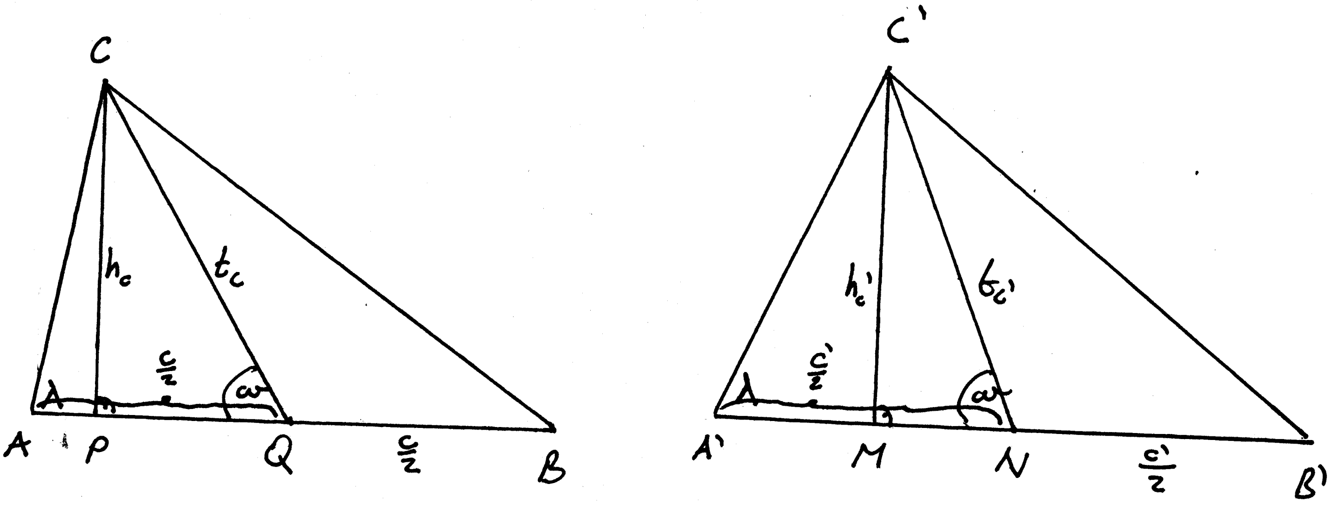
$$\sphericalangle AMN \cong \sphericalangle CMN = 90^\circ \Rightarrow NP \text{ simetrala duži } AC$$

Kako je centar opisane kružnice presjek simetrala stranica to S leži na simetrali stranice AC tj. na NP.

$\Rightarrow$ NP je prečnik opisane kružnice.

(#) Dokazati da su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c'$, $h_c=h_{c'}$ i $t_c=t_{c'}$, gdje su h_c i $h_{c'}$ visine, a t_c i $t_{c'}$ težišnice trouglova ΔABC i $\Delta A'B'C'$ redom iz vrhova C i C'.

Rj.



Uvedimo oznake kao sa slike.
Posmatrajmo ΔPQC i $\Delta MNC'$.

$$\left.\begin{array}{l} CQ \cong C'N \; (t_c=t_{c'}) \\ CP \cong C'M \; (h_c=h_{c'}) \\ \measuredangle CPQ \cong \measuredangle C'MN = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ugao naspram veće stranice}]{SSU} \begin{array}{c} \Delta PQC \cong \Delta MNC' \\ \Downarrow \\ \measuredangle AQC \cong \measuredangle A'NC' = \omega \end{array}$$

Kako je $c=c'$ to je i $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$, pa posmatrajmo ΔAQC i $\Delta A'NC'$.

$$\left.\begin{array}{l} AQ \cong A'N \; (\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}) \\ \measuredangle AQC \cong \measuredangle A'NC' = \omega \\ CQ \cong C'N \; (t_c=t_{c'}) \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \begin{array}{c} \Delta AQC \cong \Delta A'NC' \\ \Downarrow \\ \measuredangle CAQ \cong \measuredangle C'A'N = \lambda \\ \text{i } AC \cong A'C' \end{array}$$

Na kraju posmatrajmo ΔABC i $A'B'C'$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \cong A'C' \\ \measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B' = \lambda \\ AB \cong A'B' \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

q.e.d.

(#) U ravni je dato n duži ($n \geq 3$), takve da svake tri od njih imaju zajedničku tačku. Dokazati da postoji tačka zajednička za sve duži.

Rj. postavka zadatka

dato je n duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$, ..., $A_{n1}A_{n2}$ tako da svake tri imaju zajedničku tačku $\Bigg\} \Longrightarrow$ postoji zajednička tačka za sve duži

---

Zadatak dokažimo matematičkom indukcijom.

BAZA INDUKCIJE

$k=3$: Neka su date tri duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$ i $A_{31}A_{32}$. Dvije duži mogu da imaju najviše jednu zajedničku tačku. Prema pretpostavci tri duži imaju zajedničku tačku, prema tome tvrdnja je tačna za tri duži

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da postoji zajednička tačka za k duži gdje je $3 \leq k \leq n$. Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da postoji zajednička tačka za $n+1$ duž.

Pa posmatrajmo $n+1$-nu duž $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$, ..., $A_{n1}A_{n2}$, $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$

Na osnovu pretpostavke n duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$, ..., $A_{n1}A_{n2}$ imaju neku zajedničku tačku B. Na osnovu pretpostavke zadatka tri duži $A_{11}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$ i $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$ imaju zajedničku tačku. Kako duži $A_{11}A_{12}$ i $A_{21}A_{22}$ već imaju zajedničku tačku B to će i duž $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$ sadržavati tačku B. Prema tome tačka B je zajednička tačka za $n+1$-nu duž $A_{11}A_{21}$, ..., $A_{n+1,1}A_{n+1,2}$.

ZAKLJUČAK

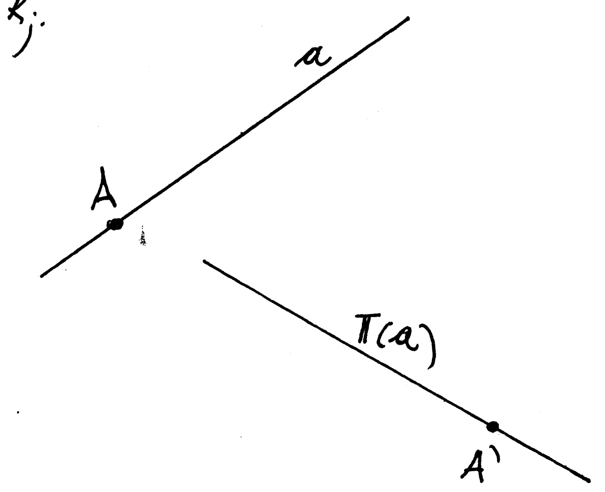
Za $n \in N$ datih duži u ravni gdje je $n \geq 3$, ako svake tri od njih imaju zajedničku tačku tada postoji zajednička tačka za sve duži.

q.e.d.

(#) Data je transformacija podudarnosti π. Dokazati da su sve tačke prave $\pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha=\pi\circ\sigma_a\circ\pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α.

Napomena: Fiksna tačka transformacije π je svaka tačka B za koju je $\pi(B)=B$.

Rj.



postavka zadatka

$\left.\begin{array}{l}\pi \text{ transf. podud.}\\ \alpha=\pi\circ\sigma_a\circ\pi^{-1} \text{ transf. podud.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ sve tačke transf. α su fiksne tačke, α je ______.

______ ______ ______

Neka je A' proizvoljna tačka su prave $\pi(a)$. Znamo da $\exists$ tačka $A\in a$ t.d. $\pi(A)=A'$ $(\pi^{-1}(A')=A)$.

Sad imamo $\alpha(A')=\pi\circ\sigma_a\circ\pi^{-1}(A')=\pi(\sigma_a(\pi^{-1}(A')))=\pi(\sigma_a(A))\overset{A\in a}{=\!=}\pi(A)=A'$

tj. $\alpha(A')=A'$. Kako je A' proizvoljna tačka sa $\pi(a)$ možemo zaključiti:

Sve tačke prave $\pi(a)$ su fiksne tačke transformacije α.

q.e.d.

Odredimo šta predstavlja α.

$$\alpha\circ\alpha=\pi\circ\sigma_a\circ\underbrace{\pi^{-1}\circ\pi}_{id}\circ\sigma_a\circ\pi^{-1}=\pi\circ\underbrace{\sigma_a\circ\sigma_a}_{id}\circ\pi^{-1}=\pi\circ\pi^{-1}=id$$

tj. $\alpha\circ\alpha=id \Rightarrow$. α je involutivna transformacija pa može biti

1. identitet
2. centralna simetrija
3. osna simetrija

Ako bi α bila identitet imali bi $\alpha=id$

$\pi\circ\sigma_a\circ\pi^{-1}=id$ $\quad /\circ\pi$ sa desne str.

$\pi\circ\sigma_a=\pi$ $\quad /\pi^{-1}\circ$ sa lijeve str.

$\sigma_a=id$ # kontradikcija (osna simetrija nije identitet)

α ne može biti centralna simetrija zato što centralna simetrija ima samo jednu fiksnu tačku, a mi smo pokazali da α ima sve tačke sa prave $\pi(a)$ kao fiksne tačke.

Prema tome α je osna simetrija.

Osa simetrije transformacije α je prava $\pi(a)$, tj.

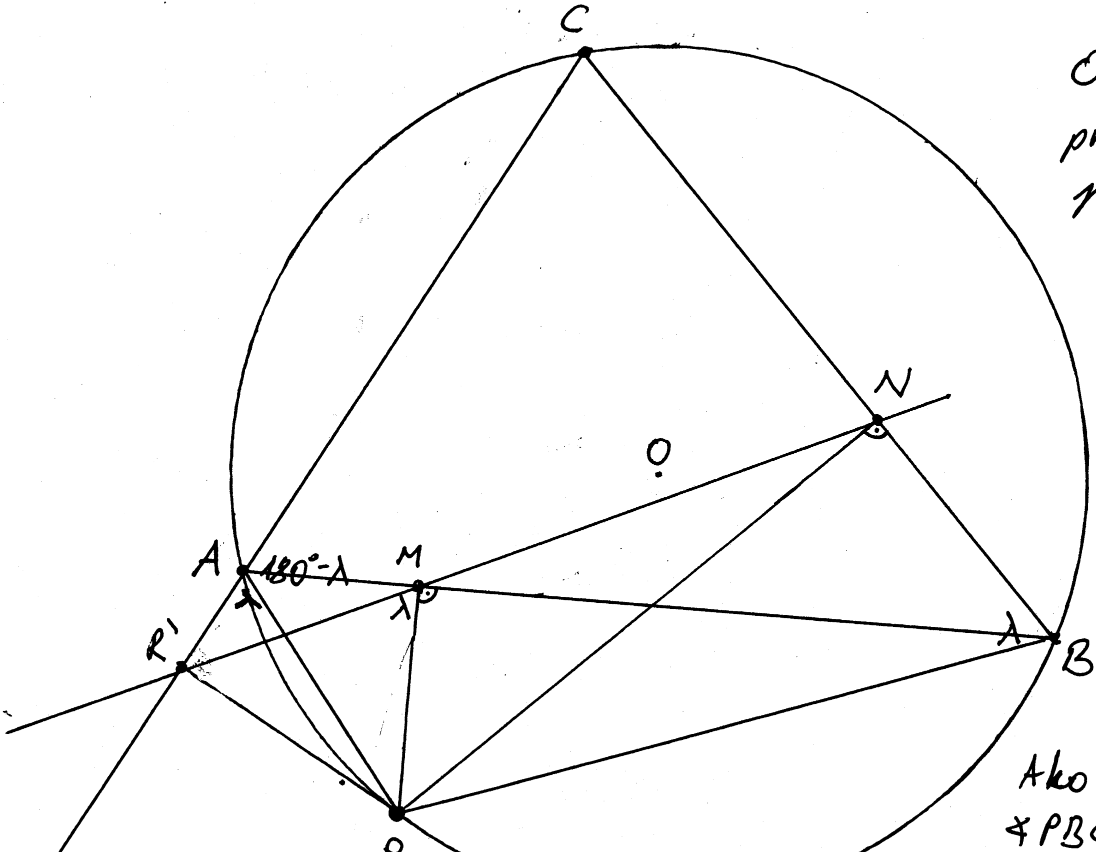
$$\alpha = \sigma_{\pi(a)} .$$

(#) Dat je trougao ΔABC i proizvoljna tačka P na krugu opisanom oko tog trougla. Neka su M, N i R redom podnožja normala povučenih iz tačke P na prave $p(A,B)$, $p(B,C)$ i $p(C,A)$. Dokazati da su tačke M, N i R kolinearne.

Rj. postavka zadatka

ΔABC
$k(O,r)$ krug opisan oko ΔABC
$P \in k$
M, N i R redom ortogonalne projekcije tačke P na $p(A,B)$, $p(B,C)$ i $p(C,A)$

$\Rightarrow$ tačke M, N i R su kolinearne



Označimo sa R' presjek pravih $p(M,N)$ i $p(A,C)$. Ako pokažemo da je $\measuredangle CR'P$ prav, naš dokaz je gotov. Posmatrajmo $\square APBC$ (tetivni četverougao). Ako označimo $\measuredangle PBC = \lambda$ imamo da je $\measuredangle PAC = 180° - \lambda$

$\Rightarrow \measuredangle PAR' = \lambda$, četverougao $\square PBNM$ je tetivni (uglovi $\measuredangle BNP$ i $\measuredangle BMP$ gledaju na istu stranicu PB i podudarni su) $\Rightarrow \measuredangle NMP = 180° - \lambda \Rightarrow \measuredangle PMR' = \lambda$. Primjetimo sad da je $\square R'PMA$ tetivni ($\measuredangle PMR' \cong \measuredangle PAR' = \lambda$) $\Rightarrow \measuredangle PR'A + \measuredangle PMA = 180°$, pa kako je $\measuredangle PMA = 90° \Rightarrow \measuredangle PR'A = 90° \Rightarrow R' \equiv R \Rightarrow$ tačke M, N i R su kolinearne. q.e.d.